

Классическая теория поля

Степанов Николай

16 февраля 2017

Операторный формализм квантовой механики, с которым мы будем работать в дальнейшем в применении к квантовой теории поля, существенно опирается на гамильтоново описание систем. Поэтому в этой лекции мы постараемся напомнить, как строится гамильтониан для классических теорий поля. Проще всего о полях думать как о наборе огромного (в пределе — континуального) набора частиц, так что в каждой точке пространства находится отдельная классическая частица; поэтому начнём мы вообще с классической N -частичной механики.

1 Классическая механика N степеней свободы

Лагранжев формализм В общем случае классическая система из N степеней свободы описывается набором обобщённых координат $\{q_i\}_{i=1}^N$. В рамках лагранжевого формализма, истинная траектория $\{q_i(t)\}_{i=1}^N$ соответствует экстремали функционала $S[q_i(t)]$, называемого *действием*. В рамках классической механики, действие представляет собой интеграл от *функции Лагранжа* $L(q_i, \dot{q}_i, t)$, представляющей собой разность кинетической и потенциальной энергий:

$$S[q_i(t)] = \int dt \cdot L(q_i(t), \dot{q}_i(t), t)$$

Поиск экстремали функционала сводится к варьированию действия при вариации траектории, и требования зануления первой вариационной производной:

$$\delta S[q_i(t)] = \int dt \cdot (L(q_i + \delta q_i, \dot{q}_i + \delta \dot{q}_i, t) - L(q_i, \dot{q}_i, t)) = \int dt \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right) = \int dt \underbrace{\left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right)}_{\equiv \frac{\delta S}{\delta q_i(t)}} \delta q_i$$

Последнее является тем самым определением вариационной производной. Требования зануления первой вариации даёт уравнения движения — уравнения Эйлера-Лагранжа:

$$\frac{\delta S}{\delta q_i(t)} = \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0$$

Гамильтонов формализм Альтернативой лагранжевому формализму является гамильтонов формализм, который обладает над ним рядом преимуществ, которые изучались в курсе теоретической механики. Для построения гамильтонового формализма первым делом необходимо ввести *канонически сопряжённые импульсы* $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$, и выразить все скорости $\dot{q}_i(t)$ через них; а затем произвести преобразование Лежандра функции Лагранжа, перейдя к функции Гамильтона:

$$H(q_i, p_i, t) \equiv \sum_i p_i \dot{q}_i - L(q_i, \dot{q}_i, t)$$

Уравнения движения — уравнения Гамильтона — в таком случае записываются в следующем виде:

$$\begin{cases} \frac{dq_i}{dt} &= \frac{\partial H(q_i, p_i, t)}{\partial p_i} \\ \frac{dp_i}{dt} &= -\frac{\partial H(q_i, p_i, t)}{\partial q_i} \end{cases}$$

Скобки Пуассона В рамках гамильтонова формализма полезным объектом является *скобка Пуассона*. Она определяется для двух произвольных физических величин $A(q_i, p_i)$ и $B(q_i, p_i)$ согласно соотношению:

$$\{A(q_i, p_i, t), B(q_i, p_i, t)\} \equiv \sum_i \left(\frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial B}{\partial q_i} \right)$$

Среди её свойств можно заметить следующие. Она антикоммутирует и удовлетворяет тождеству Якоби:

$$\{A, B\} + \{B, A\} \equiv 0, \quad \{A, \{B, C\}\} + \{B, \{C, A\}\} + \{C, \{A, B\}\} \equiv 0$$

Кроме того, несложно заметить следующие соотношения:

$$\{q_i, q_j\} = 0, \quad \{p_i, p_j\} = 0, \quad \{q_i, p_j\} = \delta_{ij}$$

Наконец, через скобку Пуассона очень компактно записывается уравнение эволюции произвольной физической величины:

$$\frac{dA(q_i(t), p_i(t), t)}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + \sum_i \left(\frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{dp_i}{dt} \right) = \frac{\partial A}{\partial t} + \sum_i \left(\frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) = \frac{\partial A}{\partial t} + \{A, H\}$$

Каноническое квантование Наконец, как осуществляется переход от классической механики к квантовой? Всем наблюдаемым величинам ставятся в соответствие эрмитовы операторы $A \mapsto \hat{A}$, действующие в гильбертовом пространстве волновых функций; и один из способов построения квантовой механики заключается в постулировании связи коммутационных соотношений между этими операторами и классической скобки Пуассона: $[\hat{A}, \hat{B}] \equiv i\{A, B\}^1$

2 Классическая теория поля

Непрерывный предел О квантовой теории поля можно думать следующим образом. Пусть имеется «матрац»: система из N частиц, каждая из которых находится в реальном пространстве и расположена в какой-то точке $\mathbf{x}$. В непрерывном пределе $N \rightarrow \infty$ эта система частиц описывается полем $\phi(\mathbf{x})$ (тем самым, индекс i , нумеровавший частицы, превращается в непрерывный индекс $\mathbf{x}$). Все функции N переменных (вроде функции Лагранжа) превращаются в функционалы соответствующих полей. В таком случае, общие правила осуществления такого непрерывного предела заключаются в следующем:

$$L(q_i) \mapsto L[\phi(\mathbf{x})], \quad \sum_i \mapsto \int d\mathbf{x}, \quad \delta_{ij} \mapsto \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad \frac{\partial}{\partial q_i} \mapsto \frac{\delta}{\delta \phi(\mathbf{x})}$$

Лагранжев формализм Раньше мы имели дело с функцией Лагранжа, теперь же функция Лагранжа сама превращается в функционал. Нас будут интересовать только локальные функции Лагранжа — то есть те, которые представимы в виде интеграла по пространству от *плотности лагранжиана*, который, в свою очередь, является уже обычной функцией полей (и, возможно, их производных)²:

$$S[\phi(\mathbf{x}, t)] = \int dt L[\phi(\mathbf{x}, t), \partial_\mu \phi(\mathbf{x}, t)], \quad L[\phi(\mathbf{x}, t), \partial_\mu \phi(\mathbf{x}, t)] = \int d\mathbf{x} \mathcal{L}(\phi(\mathbf{x}, t), \partial_\mu \phi(\mathbf{x}, t))$$

(индекс μ пробегает как временную, так и пространственные координаты $\mu = \overline{t, x, y, z}$). Такое действие варьируется полностью аналогично N -частичной механике:

$$\frac{\delta S}{\delta \phi(\mathbf{x}, t)} = \frac{\delta L}{\delta \phi(\mathbf{x}, t)} - \partial_\mu \frac{\delta L}{\delta (\partial_\mu \phi(\mathbf{x}, t))} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} = 0$$

(по повторяющимся индексам производится суммирование; кроме того, поскольку в дальнейшем мы будем иметь дело с релятивистскими теориями поля, подразумевается метрика Минковского $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$).

Гамильтонов формализм Следуя общей схеме, для построения гамильтонового описания поля необходимо ввести канонически сопряжённый импульс (который тоже представляет собой поле):

$$\pi(\mathbf{x}) = \frac{\delta L}{\delta (\partial_t \phi(\mathbf{x}))} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_t \phi)},$$

и после чего произвести преобразование Лежандра, переходя к функционалу Гамильтона³:

$$H[\phi(\mathbf{x}), \pi(\mathbf{x})] = \int d\mathbf{x} \pi(\mathbf{x}) \partial_t \phi(\mathbf{x}) - L[\phi(\mathbf{x}), \partial_\mu \phi(\mathbf{x})]$$

Функционал Гамильтона для локальных теорий поля тоже представляет собой интеграл по пространству от *плотности гамильтониана* (имеющей смысл плотности энергии), представляющей собой обычную функцию:

¹Конечно, тут имеется проблема в построении квантовых аналогов выражений типа $x\dot{p}$: из-за их некоммутации, соответствующий оператор $\hat{x}\hat{p}$, вообще говоря, будет неэрмитов, из-за чего требуется их дополнительно симметризовать. Но нам будет достаточно случаев, где этих проблем не возникает.

²Не все теории поля представимы в таком виде. В различных приложениях — например, в гидродинамике — порой приходится сталкиваться и с нелокальными теориями поля. Впрочем, с точки зрения релятивизма, такие теории нарушают лоренц-инвариантность и причинность, поэтому большого смысла они не имеют.

³Стоит обратить внимание, что даже если исходная теория поля была релятивистски инвариантной, то гамильтоново её описание уже таковым не является, явно выделяя роль временной оси; что довольно очевидно, ведь функция Гамильтона — это энергия, и она не является релятивистски инвариантной величиной. Тем не менее, это ничему не противоречит

$$H[\phi(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{x}, t)] = \int d\mathbf{x} \mathcal{H}(\phi(\mathbf{x}), \nabla\phi(\mathbf{x}), \pi(\mathbf{x})), \quad \mathcal{H} = \pi \partial_t \phi - \mathcal{L}$$

Наконец, уравнения движения — уравнения Гамильтона — записываются следующим образом:

$$\begin{cases} \frac{d\phi(\mathbf{x}, t)}{dt} &= \frac{\delta H}{\delta \pi} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi} \\ \frac{d\pi(\mathbf{x}, t)}{dt} &= -\frac{\delta H}{\delta \phi} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \phi} + \nabla \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial(\nabla \phi)} \end{cases}$$

Скобки Пуассона Наконец, физические величины тоже вводятся как функционалы полей, а скобка Пуассона определяется для них следующим образом:

$$\{A[\phi(\mathbf{x}), \pi(\mathbf{x})], B[\phi(\mathbf{x}), \pi(\mathbf{x})]\} = \int d\mathbf{x} \left[\frac{\delta A}{\delta \phi(\mathbf{x})} \frac{\delta B}{\delta \pi(\mathbf{x})} - \frac{\delta A}{\delta \pi(\mathbf{x})} \frac{\delta B}{\delta \phi(\mathbf{x})} \right]$$

Она удовлетворяет всем тем же свойствам, что и скобка Пуассона для классической многочастичной системы; в частности, верны следующие соотношения:

$$\{\phi(\mathbf{x}), \phi(\mathbf{y})\} = 0, \quad \{\pi(\mathbf{x}), \pi(\mathbf{y})\} = 0, \quad \{\phi(\mathbf{x}), \pi(\mathbf{y})\} = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})$$

Наконец, уравнения движения и процедура квантования полностью аналогичны.

2.1 Пример: теория Клейна-Гордона

Давайте проведём всю эту процедуру для одной из наиболее простых релятивистских теорий поля — теории Клейна-Гордона. Эта теория описывает скалярное поле $\phi(\mathbf{x})$ со следующим действием:

$$S[\phi] = \frac{1}{2} \int d^4x ((\partial_\mu \phi)^2 - m^2 \phi^2) = \frac{1}{2} \int d^4x ((\partial_t \phi)^2 - (\nabla \phi)^2 - m^2 \phi^2)$$

(у теории имеется внешний параметр m — «масса»; скорость света c положена равной единице). Следуя приведённым выше рассуждениям, уравнения движения имеют вид:

$$\frac{\delta S}{\delta \phi} = -(\partial^2 + m^2)\phi = 0, \quad \partial^2 = \partial_t^2 - \nabla^2$$

Канонически сопряжённый к ϕ импульс даётся выражением $\pi(\mathbf{x}) = \frac{\delta L}{\delta(\partial_t \phi(\mathbf{x}))} = \partial_t \phi(\mathbf{x})$; поэтому гамильтониан имеет вид:

$$H[\phi, \pi] = \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{x} (\pi^2 + (\nabla \phi)^2 + m^2 \phi^2)$$

и уравнения Гамильтона записываются следующим образом:

$$\begin{cases} \partial_t \phi &= \pi \\ \partial_t \pi &= -m^2 \phi + \nabla^2 \phi \end{cases}$$

2.2 Пример: «уравнение Шрёдингера»

Давайте теперь рассмотрим комплексное поле $\psi(\mathbf{x})$ со следующим действием:

$$S[\psi, \bar{\psi}] = \int dt d^d\mathbf{x} \cdot \bar{\psi}(\mathbf{x}) (i\partial_t - \hat{H}) \psi(\mathbf{x})$$

где $\hat{H}$ — некий самосопряжённый дифференциальный оператор, действующий на координату (например, $\hat{H} = -\frac{\nabla^2}{2m} + U(\mathbf{x})$). Комплексность поля ψ означает, что вообще говоря оно имеет две независимые степени свободы (вещественную и мнимую часть поля). Однако более удобно формально считать ψ и $\bar{\psi}$ независимыми динамическими переменными, и варьировать по ним независимо.

Уравнения движения в таком случае записываются в следующем виде:

$$\begin{cases} \frac{\delta S}{\delta \bar{\psi}(\mathbf{x})} &= (i\partial_t - \hat{H})\psi = 0 \\ \frac{\delta S}{\delta \psi(\mathbf{x})} &= (-i\partial_t - \hat{H}^*)\bar{\psi} = 0 \end{cases}$$

(несложно видеть, что эти уравнения комплексно сопряжены, поэтому достаточно иметь дело только с первым). Уравнение движения совпадает с уравнением Шрёдингера, с чем и вызван интерес к этой теории поля⁴.

⁴Вообще говоря, подобная теория поля часто встречается в нелинейной гидродинамике в контексте «нелинейного уравнения Шрёдингера» и т.п.

Если продолжить схему, то мы немедленно столкнёмся с проблемой, которая связана с паталогичностью этой теории — а именно, уравнения по времени всего лишь первого порядка, из-за чего применение гамильтонового формализма к ней, вообще говоря, не очень осмысленно (в частности, нет «скоростей» как отдельных степеней свободы, из-за чего импульс, сопряжённый к первой координате, совпадает со второй). Однако, мы «закроем» на это глаза и продолжим, а проверку проведём в самом конце (проверка будет заключаться в том, что уравнения движения должны получиться правильными). Итак:

$$\pi_\psi = \frac{\delta L}{\delta(\partial_t \psi)} = i\bar{\psi}, \quad \pi_{\bar{\psi}} = \frac{\delta L}{\delta(\partial_t \bar{\psi})} = 0$$

$$H = \int d^d \mathbf{x} \cdot (i\bar{\psi} \partial_t \psi - (i\bar{\psi} \partial_t \psi - \bar{\psi} \hat{H} \psi)) = \int d^d \mathbf{x} \cdot \bar{\psi}(\mathbf{x}) \hat{H} \psi(\mathbf{x})$$

Наконец, уравнения движения:

$$\begin{cases} \partial_t \psi &= \frac{\delta H}{\delta \pi_\psi} = -i \frac{\delta H}{\delta \bar{\psi}} \\ \partial_t \pi_\psi &= -\frac{\delta H}{\delta \psi} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} i\partial_t \psi &= \frac{\delta H}{\delta \bar{\psi}} = \hat{H} \psi \\ -i\partial_t \bar{\psi} &= \frac{\delta H}{\delta \psi} = \hat{H}^* \bar{\psi} \end{cases}}$$

Кроме того, полезно вычислить скобку Пуассона: $\{\psi(\mathbf{x}), \bar{\psi}(\mathbf{y})\} = -i\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})$.