

Задачи к лекции “Классическая теория поля”

16 февраля 2017 г.

Задача 1 (комплексное поле Клейна-Гордона)

Рассмотрите теорию, определённую для комплекснозначных полей $\phi(\mathbf{x}) \in \mathbb{C}$, задаваемую следующим действием:

$$S[\phi, \bar{\phi}] = \int d^4x \cdot (\partial_\mu \phi \partial_\mu \bar{\phi} - m^2 \phi \bar{\phi}) = \int d^4x (|\partial_\mu \phi|^2 - m^2 |\phi|^2)$$

1. Считая поля $\phi(\mathbf{x})$ и $\bar{\phi}(\mathbf{x})$ независимыми динамическими переменными, получите уравнения движения такой теории.
2. Постройте канонически сопряжённые полям ϕ и $\bar{\phi}$ импульсы π и $\bar{\pi}$, и перейдите к гамильтонову описанию этой теории.

* В этой задаче имеется непрерывная $U(1)$ симметрия, соответствующая преобразованию $\phi \mapsto \phi e^{i\theta}$ и $\bar{\phi} \mapsto \bar{\phi} e^{-i\theta}$, которая оставляет действие инвариантным. По теореме Нётер, этой симметрии должен соответствовать некий сохраняющийся ток J_μ , так что $\partial_\mu J_\mu = 0$. Выпишите явно выражения для компонент этого тока $J_\mu = (Q, \mathbf{j})$.

Литература Зи, задача 1.8.3; ПШ, задача 2.2. Про теорему Нётер в теории поля можно почитать в ПШ, глава 2.2.

Задача 2 (электродинамика)

Электромагнитное поле стандартным образом описывается вектор-потенциалом $A_\mu(x) = (\varphi(x), \mathbf{A}(x))$ — набором из 4 полей, которые сами образуют 4-вектор. Действие имеет знакомый вам вид:

$$S[A_\mu] = -\frac{1}{4} \int d^4x F_{\mu\nu}(x) F_{\mu\nu}(x), \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

1. Рассматривая вариацию действия и считая $A_\mu(x)$ независимыми динамическими переменными, получите уравнения движения для полей — уравнения Максвелла
2. Перейдите от действия к гамильтониану. Поскольку в действии нет члена $\partial_t \phi$, то соответствующий канонически сопряжённый импульс не определён. Отсутствие такого члена напрямую связано с калибровочной инвариантностью теории, и представляет определённую проблему. Чтобы эту проблему «обойти», можно ввести в действие дополнительное слагаемое, «фиксирующее калибровку» (gauge fix term):

$$S_{GF} = -\frac{1}{2\xi} \int d^4x (\partial_\mu A_\mu)^2$$

с произвольным вещественным параметром ξ . С учётом дополнительного члена, постройте гамильтоново описание электромагнитного поля.

Литература Обсуждение такого способа фиксации калибровки можно найти на английской википедии https://en.wikipedia.org/wiki/Gauge_fixing#R.CE.BE.gauges; обсуждение проблемы квантования электромагнитного поля также есть в ПШ (стр. 93, внизу).