Задачи к лекции «Элементы теории Ландау фазовых переходов 2 рода»

10 мая 2017

Задача 1. Флуктуационная теплоёмкость

Рассмотрите теорию Ландау для модели Изинга со следующим функционалом свободной энергии:

$$\mathcal{F}[\varphi] = \int d\boldsymbol{x} \left[\frac{1}{2}(a\varphi^2 + c(\nabla\varphi)^2) + \frac{1}{4!}b\varphi^4\right] \tag{1}$$

В рамках среднеполевого рассмотрения, реальная свободная энергия $F(T)$ даётся просто минимумом

$$F = \min_{\varphi} \mathcal{F}[\varphi]. \tag{2}$$

С другой стороны, температурные флуктуации параметра порядка приводят к тому, что и сама свободная энергия модифицируется, и на самом деле она даётся формулой $F = -T \ln Z$, или:

$$e^{-F/T} = \int \mathcal{D}\varphi \exp\left(-\frac{\mathcal{F}[\varphi]}{T}\right) \tag{3}$$

Минимум тем самым соответствует просто взятию функционального интеграла методом перевала в пренебрежении квадратичными флуктуациями в окрестности седла. Учёт флуктуаций приводит к изменению характера зависимости теплоёмкости в окрестности фазового перехода. В данной задаче предлагается найти этот характер и вычислить критический индекс теплоёмкости α.

1. В Гауссовом приближении, возьмите функциональный интеграл по φ ири $T > T_c$. Нормировочная константа, которая обычно присутствует в функциональном интеграле, приводит к произвольной константной добавке к свободной энергии — нас она не интересует. Сама свободная энергия оказывается ультрафиолетовой, и поэтому в рамках теории Ландау найти её не представляется возможным.

2. Теплоёмкость определяется как $C = -T\frac{\partial^2 F}{\partial T^2}$. При дифференцировании по температуре возникает несколько членов, причём некоторые из них ультрафиолетовые, а некоторые — конечные. Покажите, что ультрафиолетовые члены *менее сингулярны* при $T \to T_c$, а самый сингулярный член конечен. Вычислите его в пространстве размерности $d = 1, 2, 3$ и найдите критические индексы теплоёмкости $C \propto (T - T_c)^{-\alpha}$. Полученная зависимость $C(T)$ (с учётом «нулевого приближения», которое давало скачок теплоёмкости), если её нарисовать, похожа на греческую букву λ, поэтому её называют λ-точкой.

3. Повторите вычисление при $T < T_c$, раскладываясь в окрестности нетривиального седла со спонтанно нарушенной симметрией $\langle\varphi\rangle = \varphi_0 = \text{const}$.