

# «Вторичное квантование» теории Клейна-Гордона

Степанов Николай

22 февраля 2017

## Вступление об обозначениях

Тут и далее, когда мы будем иметь дело с релятивистскими теориями поля (а теория Клейна-Гордона к таковым относится), мы условимся на следующих обозначениях. Жирным шрифтом —  $\mathbf{x}$  — мы будем обозначать трёхмерные вектора; так что выражение  $\mathbf{p}\mathbf{x}$  обозначает стандартное скалярное произведение. Обычным шрифтом (там где это не вызовет путаницы) мы будем обозначать четыре-вектора  $x = (t, \mathbf{x})$ , и выражение  $px = p^\mu x^\mu = Et - \mathbf{p}\mathbf{x}$  (подразумевается метрика Минковского  $\eta^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ ; и мы не будем различать ковариантные  $p^\mu$  и контравариантные  $p_\mu$  вектора). Наконец, мы, как всегда, работаем в god-given системе единиц  $\hbar = c = 1$ .

## «Вторичное квантование» поля Клейна-Гордона

Ранее мы получили выражение для квантовой теории поля Клейна-Гордона:

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{x} (\hat{\pi}^2(\mathbf{x}) + (\nabla \hat{\phi}(\mathbf{x}))^2 + m^2 \hat{\phi}^2(\mathbf{x})), \quad [\hat{\phi}(\mathbf{x}), \hat{\pi}(\mathbf{y})] = i\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (1)$$

Давайте попробуем найти спектр этого Гамильтониана, а заодно поучимся работать с квантовой теорией поля.

## Классические уравнения движения

Давайте вспомним, как мы решали квантовый гармонический осциллятор. Поскольку классические уравнения движения на  $x$  и  $p$  (и, как следствие, квантовые уравнения на соответствующие операторы) были линейными, мы смогли построить линейные комбинации — операторы  $\hat{a}$  и  $\hat{a}^\dagger$  — с простыми коммутационными соотношениями и тривиальными уравнениями движения.

В нашем случае мы имеем дело с квадратичным действием (гамильтонианом) и, как следствие, с линейными уравнениями движения — поэтому для исследования квантовой теории поля крайне полезно изучить классические уравнения движения. Для удобства и методологической простоты, мы поместим систему в трёхмерный ящик размера  $V = L_x \times L_y \times L_z$  и на классическое поле  $\phi(\mathbf{x})$  наложим периодические граничные условия. Классическое уравнение движения — уравнение Клейна-Гордона:

$$(\partial^2 + m^2)\phi(x) = 0 \quad (2)$$

Это уравнение допускает следующие решения, которые носят название положительно- и отрицательно-частотных решений:

$$\phi_{\mathbf{p}}^{(\pm)}(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{\mp iE_{\mathbf{p}}t + i\mathbf{p}\mathbf{x}}, \quad E_{\mathbf{p}} = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} \quad (3)$$

Заметим, что связь частоты («энергии») и волнового вектора («импульса») воспроизводит релятивистский закон дисперсии для частиц массы  $m$ . Допустимые импульсы параметризуются тройкой произвольных целых чисел согласно  $\mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z) = \left(\frac{2\pi}{L_x}n_x, \frac{2\pi}{L_y}n_y, \frac{2\pi}{L_z}n_z\right)$ ; при этом это исчерпывает все линейно-независимые решения (то есть такие решения образуют базис).

## Разложение по собственным модам

**Лирическое отступление** Полевые операторы можно точно так же раскладывать в ряды и интегралы Фурье, как и обычные функции. Понимать под этим можно следующее: матричные элементы операторов по произвольным волновым функциям  $f(x) = \langle \psi_1 | \hat{\phi}(x) | \psi_2 \rangle$  являются самыми обыкновенными функциями, и эти функции уже можно раскладывать. Это, в свою очередь, означает, что *коэффициенты* такого разложения будут, в свою очередь, являться операторами (матричные элементы которых определены как соответствующие коэффициенты разложения в ряд Фурье матричных элементов исходных операторов). Но в целом, с такого рода разложениями можно работать весьма свободно.

Давайте теперь рассмотрим разложение по построенному набору:

$$\begin{cases} \hat{\phi}(x) &= \sum_{\mathbf{p}} \left( \hat{A}_{\mathbf{p}} \phi_{\mathbf{p}}^{(+)}(x) + \hat{B}_{\mathbf{p}} \phi_{\mathbf{p}}^{(-)}(x) \right) \\ \hat{\pi}(x) &= \partial_t \hat{\phi}(x) = \sum_{\mathbf{p}} (-i)\omega_{\mathbf{p}} \left( \hat{A}_{\mathbf{p}} \phi_{\mathbf{p}}^{(+)}(x) - \hat{B}_{\mathbf{p}} \phi_{\mathbf{p}}^{(-)}(x) \right) \end{cases} \quad (4)$$

Поскольку коммутационные соотношения исходно даны для операторов в один и тот же момент времени, давайте положим  $t = 0$  и обратим это разложение:

$$\hat{A}_{\mathbf{p}}, \hat{B}_{\mathbf{p}} = \frac{1}{2\sqrt{V}} \int d^3x e^{-i\mathbf{p}\mathbf{x}} \left( \hat{\phi}(\mathbf{x}) \pm \frac{i}{E_{\mathbf{p}}} \hat{\pi}(\mathbf{x}) \right) \Rightarrow \hat{B}_{\mathbf{p}} = \hat{A}_{-\mathbf{p}} \quad (5)$$

(обратим внимание, что данное соотношение напрямую является следствием того, что поле  $\phi(\mathbf{x})$  — вещественное поле). Непосредственной проверкой можно легко убедиться в выполнении следующих коммутационных соотношений:

$$[\hat{A}_{\mathbf{p}}, \hat{A}_{\mathbf{q}}] = [\hat{A}_{\mathbf{p}}^{\dagger}, \hat{A}_{\mathbf{q}}^{\dagger}] = 0, \quad [\hat{A}_{\mathbf{p}}, \hat{A}_{\mathbf{q}}^{\dagger}] = \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} \delta_{\mathbf{p}\mathbf{q}} \quad (6)$$

Поэтому, введя определение  $\hat{A}_{\mathbf{p}} = \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \hat{a}_{\mathbf{p}}$ , мы приходим к стандартной алгебре лестничных операторов. Таким образом, приведём для справочных целей (поскольку в будущем мы будем неоднократно к этому результату возвращаться) окончательный результат:

$$\begin{cases} \hat{\phi}(x) &= \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{p}} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} (\hat{a}_{\mathbf{p}} e^{-i\mathbf{p}\mathbf{x}} + \hat{a}_{\mathbf{p}}^{\dagger} e^{i\mathbf{p}\mathbf{x}}) \\ \hat{\pi}(x) &= \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{p}} (-i) \sqrt{\frac{E_{\mathbf{p}}}{2}} (\hat{a}_{\mathbf{p}} e^{-i\mathbf{p}\mathbf{x}} - \hat{a}_{\mathbf{p}}^{\dagger} e^{i\mathbf{p}\mathbf{x}}) \end{cases}, \quad [\hat{a}_{\mathbf{p}}, \hat{a}_{\mathbf{q}}^{\dagger}] = \delta_{\mathbf{p}\mathbf{q}} \quad (7)$$

Напомним, тут имеется в виду четыре-вектора  $x = (t, \mathbf{x})$  и  $p = (E_{\mathbf{p}}, \mathbf{p})$ , так что  $px = E_{\mathbf{p}}t - \mathbf{p}\mathbf{x}$ .

## Гамильтониан и квазичастицы

Подставим разложение в таком виде в гамильтониан. Достаточно прямолинейной выкладкой можно получить следующий ответ:

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{p}} E_{\mathbf{p}} \left( \hat{a}_{\mathbf{p}}^{\dagger} \hat{a}_{\mathbf{p}} + \frac{1}{2} \right) \quad (8)$$

Этот гамильтониан представляет собой набор «осцилляторов» — по одному осциллятору на каждое допустимое *квантовое состояние* (состояния тут нумеруются импульсом  $\mathbf{p}$ ). В этом представлении волновые функции параметризуются набором *чисел заполнения* этих состояний  $n_{\mathbf{p}} = 0, 1, \dots$  (эти числа заполнения являются собственными числами оператора  $\hat{n}_{\mathbf{p}} = \hat{a}_{\mathbf{p}}^{\dagger} \hat{a}_{\mathbf{p}}$ ):  $|\psi\rangle = |n_{\mathbf{p}_1}, n_{\mathbf{p}_2}, \dots\rangle$ .

Такое представление собственных состояний гамильтониана допускает следующую трактовку. Величины  $n_{\mathbf{p}}$  обозначают количество *квазичастиц* в состоянии с импульсом  $\mathbf{p}$ . Поскольку такое число может быть произвольным неотрицательным, то мы явно имеем дело с *бозонами*. Операторы  $\hat{a}_{\mathbf{p}}^{\dagger}$  *рождают* частицу в состоянии с импульсом  $\mathbf{p}$ , а  $\hat{a}_{\mathbf{p}}$  — уничтожают. Поскольку в этом представлении энергия волновой функции равна  $E = \sum_{\mathbf{p}} n_{\mathbf{p}} E_{\mathbf{p}}$  (за вычетом постоянного множителя, который мы пока опустим), то каждая такая квазичастица несёт энергию  $E_{\mathbf{p}}$ .

Основное состояние такого гамильтониана — состояние с нулевыми числами заполнения, то есть состояние без частиц — носит название *вакуума*, и обозначается как  $|0\rangle$ .

## Энергия вакуума и ультрафиолетовые расходимости

Энергия основного состояния — вакуума — обладает, тем не менее, конечной энергией, которая складывается из энергии «нулевых колебаний»:

$$E_0 = \langle 0 | \hat{H} | 0 \rangle = \sum_{\mathbf{p}} \frac{1}{2} E_{\mathbf{p}} \quad (9)$$

«Термодинамический предел»  $V \rightarrow \infty$  (который, конечно же, тут везде подразумевался) строится стандартным образом путём тривиальной замены суммирований по импульсам на интегралы:  $\sum_{\mathbf{p}} \mapsto \int \frac{V d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}$ . Можно заметить, что в этом пределе энергия вакуума бесконечна, поскольку пропорциональна (бесконечно большому) объёму системы. Само по себе это не должно удивлять: ведь энергия является экстенсивной физической величиной, и она *должна быть* пропорциональна объёму.

Плотность энергии вакуума  $\epsilon = \frac{E}{V} = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2} E_{\mathbf{p}}$  уже является хорошо определённой величиной в термодинамическом пределе. Однако, к сожалению и этот интеграл расходится на больших импульсах как  $\sim p^4$ . Такие расходимости — расходимости на больших импульсах — называют *ультрафиолетовыми расходимостями*, и они являются источником головной боли людей, занимающихся квантовыми теориями поля.

Что же означает такая расходимость? Тут есть несколько подходов и ответов на этот вопрос. Во-первых, можно отметить, что плотность энергии вакуума не является *наблюдаемой физической величиной*. Измерима лишь разница энергий, и таким образом эту бесконечную константу можно просто игнорировать, покуда она неизмерима. Во-вторых — любопытный читатель может заметить, что тензор энергии-импульса вакуума всё-таки входит в уравнения общей теории относительности Эйнштейна и определяет величину космологической постоянной  $\Lambda$ , и тем самым всё-таки наблюдается. Совмещение квантовой теории поля и гравитации по сей день является нерешённой задачей, поэтому ОТО мы заниматься не будем, а на это замечание ответим гораздо более важным утверждением. Большие импульсы и энергии по дуальности соответствуют малым расстояниям и масштабам времени. *На самом деле* никто не знает, как там устроена природа, каким уравнениям она подчиняется (теория струн?). Мы знаем лишь, что в допустимых экспериментально пределах эта теория работает достаточно хорошо; но даже уже мы знаем, что не всё так просто. Частицы материи состоят из ещё более мелких частиц — лептонов и кварков, а бозоны — переносчики взаимодействия подчиняются чуть более сложным теориям, чем теория Клейна-Гордона. Так что на самом деле, всякая теория поля имеет смысл лишь как некоторое *низкоэнергетическое эффективное рассмотрение*, имеющая свои границы применимости. В частности, наличие ультрафиолетовых расходимостей лишь доказывает, что на больших энергиях наша теория попросту *неприменима*, и её выводами можно пользоваться только для достаточно малых импульсов. В теорию необходимо вводить *обрезку, регуляризацию* — например, ограничивать допустимые импульсы некоторым большим, но конечным (и, увы, неизвестным) импульсом  $|p| < \Lambda$ .

Таким образом, ультрафиолетовые расходимости в некоторых физических величинах означают лишь то, что данные величины *невозможно вычислить* в рамках теории. Они зависят от поведения системы там, где теория уже не работает (зависят от обрезки  $\Lambda$ ). Может показаться странным — а зачем тогда вообще такая теория нужна? Прелесть в том, что в *хороших* теориях (например, квантовая электродинамика) количество величин, которые невозможно вычислить в рамках теории, оказывается конечным. Если взять значения для них, скажем, из эксперимента — то с ними можно уже связать другие, менее тривиальные физические величины; тем самым, такие теории обладают всё-таки *предсказательной силой* и являются осмысленными.

Иначе проявляют себя *инфракрасные расходимости*, или расходимости в физических величинах при  $|p| \rightarrow 0$ . Такие расходимости физичны, поскольку они находятся в пределах границы применимости теории, и обычно они являются указанием на *нечто интересное*, происходящее в данной системе. С такими расходимостями приходится разбираться индивидуально.