

Задачи к лекции «Графен»

Степанов Николай

15 марта 2017

Упражнения

Упражнение 1. Выведите гамильтониан для электронов из долины K' .

Упражнение 2. Выпишите волновые функции электронов с импульсом $\mathbf{p}$ из долины K (то есть полный квазиимпульс равен $\mathbf{K} + \mathbf{p}$).

Упражнение 3. Реальные значения туннельного матричного элемента для графена равно $t \simeq 3.11$ эВ, а постоянная решётки равна $a \simeq 1.42$ Å. Чему равна групповая скорость электронов? До каких температур низкоэнергетическое приближение оправдано?

Задачи

Задача 1. Одномерная модель

Рассмотрите одномерный прыжковый гамильтониан на цепочке длины L из N узлов, с периодическими граничными условиями:

$$\hat{H} = -t \sum_n (\hat{a}_n^\dagger \hat{a}_{n+1} + h.c) \quad (1)$$

1. Диагонализуйте гамильтониан, введя операторы рождения и уничтожения частиц с фиксированным квазиимпульсом, $\hat{a}_k$ и $\hat{a}_k^\dagger$. Найдите закон дисперсии квазичастиц.
2. Пусть эта система описывает бесспиновые фермионы, концентрация которых n . Покажите, что основное состояние соответствует заполнению состояний с $k \in (-k_F, k_F)$. Как «Ферми-импульс» k_F связан с n ?
3. Низкоэнергетические возбуждения возникают вблизи Ферми-точек, и представляют собой частицы движущиеся влево (вблизи $-k_F$) и вправо (вблизи k_F). Введите поля $\hat{\psi}(x) = (\hat{\psi}_L(x), \hat{\psi}_R(x))$, и постройте низкоэнергетическую теорию поля.

Задача 2. Klein paradox

Рассмотрите электрон, движущийся в графене в долине K с гамильтонианом $\hat{H} = v(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})$. На лист графена напылён потенциальный барьер, описываемый следующим потенциалом:

$$V(x, y) = \begin{cases} V_0, & x \in [-D/2, D/2] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}, \quad (2)$$

(плавный потенциал — считая $D \gg a$ — одинаково действует на подрешётки A и B). Пусть электрон с энергией $E > 0$ налетает по нормали на ступеньку. Найдите коэффициенты прохождения T и отражения R .

Задача 3. Поглощение света

На лист графена по нормали к нему падает плоско-поляризованная электромагнитная волна частоты ω_0 . Исследуйте поглощение электромагнитного излучения графеном.

1. Электромагнитное поле — калибровочное, поэтому взаимодействие с электронами описывается стандартным образом, путём замены импульса $\hat{\mathbf{p}}$ на «ковариантную производную» $\hat{\mathbf{p}} - \frac{e}{c}\mathbf{A}$, и $\mathbf{A}$ — вектор-потенциал. Выпишите вектор-потенциал, описывающий такую задачу (в калибровке Вейля $\varphi = 0$).

2. Используя золотое правило Ферми, вычислите поглощение энергии листом графена $\frac{dE_{abs}}{dt}$. Используйте тот факт, что единственный способ выполнить закон сохранения энергии и импульса — это переброска электрона из заполненной валентной зоны (ветви спектра $E_{\mathbf{p}}^{(-)}$) в пустую зону проводимости (ветви спектра $E_{\mathbf{p}}^{(+)}$). Учтите вырождения по спинам и долинам. Полученная величина должна быть пропорциональна площади листа A^1 , которая возникнет из-за суммирования по начальным состояниям.
3. Вычислите вектор Пойтинга падающей волны $\mathcal{S}$, и полное количество энергии, падающей на лист $\frac{dE_{tot}}{dt} = S \cdot A$. Найдите коэффициент поглощения $c = \frac{dE_{abs}/dt}{dE_{tot}/dt}$.

¹Конечно, более осмыслена ситуация, когда на графен светят лазером с конечной площадью пятна A . Однако, покуда пятно макроскопически большое, $A \gg a^2$, ничего не изменится.