

Задачи к лекции «Фононы»

Степанов Николай

22 марта 2017

Упражнение 1

Покажите, что теорию, описывающую только продольные фононы, можно описать в терминах скалярного поля $\varphi(\mathbf{r})$, которое определяется через Фурье как $\varphi_{\mathbf{k}} = (\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_{\mathbf{k}})/|\mathbf{k}|$. Покажите, что теория поля, описывающая поле $\varphi(\mathbf{r})$, с точностью до обозначений совпадает с безмассовой теорией Клейна-Гордона, со скоростью света заменённой на скорость продольного звука $c \equiv c_l$:

$$\hat{H}_{ph} = \frac{\rho}{2} \int d\mathbf{r} [\hat{\pi}^2 + c^2 (\nabla \hat{\varphi})^2] \quad (1)$$

Задача 1

Рассмотрите модель трёхмерного металла, описывающую электроны, взаимодействующие с фононами:

$$\hat{H} = \int d\mathbf{r} \left[\hat{\psi}^\dagger \left(-\frac{1}{2m} \Delta \right) \hat{\psi} + \frac{\rho}{2} (\hat{\pi}^2 + c^2 (\nabla \hat{\varphi})^2) + \frac{gn}{\nu} \hat{\psi}^\dagger \hat{\psi} (|\nabla \hat{\varphi}|) \right] = \sum_{\mathbf{p}} \epsilon_{\mathbf{p}} \hat{c}_{\mathbf{p}}^\dagger \hat{c}_{\mathbf{p}} + \sum_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}} + \hat{H}_{e-ph}$$

$$\epsilon_{\mathbf{p}} = \frac{p^2}{2m}, \quad \omega_{\mathbf{k}} = c|\mathbf{k}|, \quad [\hat{a}_{\mathbf{p}}, \hat{a}_{\mathbf{q}}^\dagger] = \{\hat{c}_{\mathbf{p}}, \hat{c}_{\mathbf{q}}^\dagger\} = \delta_{\mathbf{p}\mathbf{q}}$$

(оператор $|\nabla|$ действует в Фурье-пространстве как домножение на $i|\mathbf{k}|$). Концентрация электронов равна n . Вычислите время жизни фонона с частотой ω в такой системе.

1. Волновая функция, описывающая систему, представляет собой произведение волновой электронной системы $|\Omega\rangle$ (заполненная Ферми-сфера) и фононного вакуума $|0\rangle$.
2. Предлагается использовать золотое правило Ферми, используя $\hat{H}_{e-ph}$ как возмущение. Начальное состояние содержит фонон импульсом $\mathbf{k}$: $|i\rangle = \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger |0\rangle$. Конечное состояние содержит электрон-дырочную пару $|f\rangle = \hat{c}_{\mathbf{p}_1}^\dagger \hat{c}_{\mathbf{p}_2} |\Omega\rangle$ (при этом импульс электрона равен $\mathbf{p}_1$ и $|\mathbf{p}_1| > p_F$; а импульс дырки равен $-\mathbf{p}_2$ и $|\mathbf{p}_2| < p_F$). Покажите, что только такие матричные элементы отличны от нуля $H_{if}^{(e-ph)} = \langle i | \hat{H}_{e-ph} | f \rangle \neq 0$. Вычислите матричный элемент; покажите, что он отличен от нуля при выполнении закона сохранения импульса $\mathbf{k} = \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2$.
3. Вычислите энергию начального состояния ϵ_i и конечного состояния ϵ_f .
4. Время жизни определяется скоростью переходов $w_{i \rightarrow f} = 2\pi \left| H_{if}^{(e-ph)} \right|^2 \delta(\epsilon_i - \epsilon_f)$, просуммированному по всем конечным состояниям $\tau_i^{-1} = \sum_f w_{i \rightarrow f}$. Покажите, что у этого выражения имеется конечный предел бесконечного объема системы $V \rightarrow \infty$ (с заменой сумм по импульсам на интегралы).
5. Чтобы разобраться с кинематикой рассеяния, удобно параметризовать конечные импульсы согласно $\mathbf{p}_{1,2} = \mathbf{p} \pm \frac{\mathbf{k}}{2}$, что автоматически удовлетворяет закону сохранения импульса. Энергию и импульс фонона нужно считать малыми, так что $\omega \ll E_F$ и $k \ll p_F$.
6. Выразите ответ через безразмерный параметр $\zeta = \frac{g^2 n^2}{\nu \rho c^2}$. Покажите, что он действительно является безразмерным, а также оцените его.

Литература ЛШ, глава 6 «электроны и фононы», задача 31.