Функции Грина

Побойко Игорь

29 марта 2017

Двухточечные корреляционные функции

Как мы выяснили на различных примерах, решение физических задач с помощью методов квантовой теории поля сводится к вычислению различных *корреляционных функций* — вакуумных средних от полевых операторов (или операторов рождения и уничтожения, которые с ними линейно связаны). Для демонстрации ключевых объектов, которые при этом возникают, вернёмся к вещественной теории Клейна-Гордона. Мы будем интересоваться корреляторами вида $\langle 0|\,\hat\phi(x_1)\hat\phi(x_2)\ldots|0\rangle$.

Систематический способ вычисления таких корреляционных функций следующий. Полевые операторы можо представить в виде $\hat\phi(x) = \hat\phi^{(+)}(x) + \hat\phi^{(-)}(x)$, где $\hat\phi^{(+)}(x)$ содержит только операторы рождения $\hat a^\dagger_{\mathbf p}$, а $\hat\phi^{(-)}(x)$ — содержащую только операторы уничтожения $\hat a_{\boldsymbol p}$; поэтому про них известно следующее:

$$\hat\phi^{(-)}(x)\,|0\rangle = \langle 0|\,\hat\phi^{(+)}(x) \equiv 0 \tag{1}$$

После разбиения, достаточно использовать коммутационные соотношения и тот факт, что $[\hat\phi^{(+)}(x_1), \hat\phi^{(-)}(x_2)]$ — это уже не оператор, а число, и «протащить» все $\hat\phi^{(-)}$ «направо», а $\hat\phi^{(+)}$ — «налево»[1], после чего их действие мы знаем — тождественный ноль. Все члены, которые при этом по пути «выпадут» за счёт коммутаторов, и дадут ответ. В качестве демонстрации, посчитаем таким способом самую тривиальную двухточечную корреляционную функцию:

$$\begin{aligned} D(x-y) \equiv \langle 0|\,\hat\phi(x)\hat\phi(y)\,|0\rangle = \langle 0|\,(\cancelto{0}{\hat\phi^{(+)}(x)} + \hat\phi^{(-)}(x))(\hat\phi^{(+)}(y) + \cancelto{0}{\hat\phi^{(-)}(y)})\,|0\rangle = \left\langle \hat\phi^{(-)}(x)\hat\phi^{(+)}(y) \right\rangle = \\ = \langle 0|\left[\hat\phi^{(-)}(x), \hat\phi^{(+)}(y)\right] + \cancelto{0}{\hat\phi^{(+)}(y)\hat\phi^{(-)}(x)\,|0\rangle} = \left[\hat\phi^{(-)}(x), \hat\phi^{(+)}(y)\right] \end{aligned} \tag{2}$$

Последнее считается тривиально, используя разложение полевых операторов по лестничным:

$$\hat\phi(x) = \frac{1}{\sqrt V}\sum_{\boldsymbol p}\frac{1}{\sqrt{2E_{\boldsymbol p}}}\left(\hat a_{\boldsymbol p} e^{-ipx} + \hat a^\dagger_{\boldsymbol p} e^{ipx}\right) \tag{3}$$

$$D(x-y) = \frac{1}{V}\sum_{\boldsymbol p}\frac{1}{2E_{\boldsymbol p}} e^{-ip(x-y)} = \int \frac{d^3\boldsymbol p}{(2\pi)^3 2E_{\boldsymbol p}} e^{-ip(x-y)} \tag{4}$$

Обратим внимание, что этот объект лоренц-инвариантен, поскольку таковой является «мера» $\int\frac{d^3\boldsymbol p}{(2\pi)^3 2E_{\boldsymbol p}}$; напомним, что мы используем обозначения, в которых в экспоненте стоит произвещение четыре-векторов: $p(x-y) \equiv p_\mu (x-y)^\mu = E_{\boldsymbol p}(x^0 - y^0) - \boldsymbol p\cdot(\boldsymbol x - \boldsymbol y)$; в частности, эта корреляционная функция может зависеть только от интервала $s^2 = (x-y)^2 = (x^0-y^0)^2 - (\boldsymbol x - \boldsymbol y)^2$.

Свойства причинности и запаздывающий пропагатор

Гораздо более интересным объектом является коммутатор полей в двух точках x и y. Из курса квантовой механики известно, что если два эрмитовых оператора коммутируют, то у них имеется общий базис; более того, это значит, что акт взаимодействия («измерения» поля) в одной точке никак не может повлиять на результат взаимодействия с таким полем (его измерение) в другой такой точке. Коммутатор отражает свойства *причинности* теории поля.

Поскольку полевые операторы — линейны по операторам рождения и уничтожения, то коммутатор — просто число. Тем самым, можно свести задачу к предыдущей:

$$[\hat\phi(x), \hat\phi(y)] = \langle 0|\,\hat\phi(x)\hat\phi(y) - \hat\phi(y)\hat\phi(x)\,|0\rangle = D(x-y) - D(y-x) = \int\frac{d^3\boldsymbol p}{(2\pi)^3 2E_{\boldsymbol p}}(e^{-ip(x-y)} - e^{ip(x-y)}) \tag{5}$$

[1] Говорят — «нормально упорядочить» выражение. Само выражение, в котором все операторы уничтожения стоят справа, а рождения — слева, называют *нормально упорядоченным*

Для исследования полученного результата можно воспользоваться следующим соображением. Пусть x и y связаны пространственно-подобным интервалом, так что $s^2 = (x-y)^2 = -\boldsymbol{r}^2 < 0$. Это означает, что в выражении можно совершить буст — преобразование Лоренца, перемешивающее энергию $E_{\boldsymbol{p}}$ и импульс $\boldsymbol{p}$ — который уберёт нулевую компоненту скалярного произведения, и в экспоненте будет стоять $p(x-y) = -\boldsymbol{p}\boldsymbol{r}^2$. Полученный интеграл нечетён по импульсу, и тем самым зануляется. Если же они связаны временно-подобным интервалом, то есть $s^2 = t^2 > 0$, то подобный трюк позволит привести выражение к виду $p(x-y) = E_{\boldsymbol{p}}t$; в результате чего под интегралом будет стоять вполне конечное ненулевое выражение. Таким образом, принцип причинности, гласящий, что события могут быть связаны причинной связью только если интервал между ними времене-подобен, выполняется и в квантовой теории поля.

В соответствии с этим, одним из самых важных объектов в квантовой теории поля является так называемая *запаздывающая функция Грина* (иногда её называют *причинной*), которая определяется с дополнительной функцией Хевисайда, роль которой будет раскрыта позже:

$$\boxed{D_R(x-y) \equiv \theta(x^0-y^0)\left\langle[\hat{\phi}(x), \hat{\phi}(y)]\right\rangle} \tag{6}$$

Для выяснения её смысла, вычислим сперва её преобразование Фурье:

$$D_R(\omega, \mathbf{p}) = \int_0^\infty dt e^{i\omega t}\int d^3\boldsymbol{r} e^{-i\boldsymbol{p}\boldsymbol{r}}\int \frac{d^3\boldsymbol{q}}{(2\pi)^3 2E_{\boldsymbol{q}}}(e^{-iE_{\boldsymbol{q}}t+i\boldsymbol{q}\mathbf{r}} - e^{iE_{\boldsymbol{q}}t-i\boldsymbol{q}\mathbf{r}}) \tag{7}$$

Интеграл по координате снимается согласно $\int d^3\boldsymbol{r} e^{i\boldsymbol{p}\boldsymbol{r}} = (2\pi)^3\delta^{(3)}(\boldsymbol{p})$. Формально, конечно, интегралы по времени расходятся, и для придания им смысла их нужно регуляризовать следующим образом:

$$\int_0^\infty e^{i\omega t}dt \underset{def}{\equiv} \lim_{\epsilon\to 0}\int_0^\infty e^{i\omega t-\epsilon t}dt = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{i}{\omega+i\epsilon} \equiv \frac{i}{\omega+i0} \tag{8}$$

Обратим внимание, что такой способ регуляризации даёт выражение, совместное с правилом обхода полюсов при взятии обратного преобразования Фурье, используя методы ТФКП. Другим способом воспринимать эту инфинитезимальную добавку — это в используя формулу Сохоцкого, согласно которой $\frac{1}{\omega+i0} = \mathcal{P}\frac{1}{\omega} - i\pi\delta(\omega)$. Используя эти правила, мы приходим к следующему результату:

$$D_R(\omega, \boldsymbol{p}) = \frac{1}{2E_{\boldsymbol{p}}}\left(\frac{i}{\omega - E_{\boldsymbol{p}} + i0} - \frac{i}{\omega + E_{\boldsymbol{p}} + i0}\right) = \boxed{\frac{i}{(\omega+i0)^2 - E_{\mathbf{p}}^2} = \frac{i}{p^2-m^2}} \tag{9}$$

где последний знак равенства нужно понимать символически, не забывая о правиле обхода полюсов при вычислении интегралов по ω — полюса $\omega = \pm E_{\boldsymbol{p}} - i0$ обходятся сверху особенностей. Наконец, последнее же равенство в действительности означает, что запаздывающая функция Грина удовлетворяет следующему уравнению:

$$\boxed{(-\partial^2 - m^2)D_R(x) = i\delta^{(4)}(x),} \tag{10}$$

то есть с точностью до множителя i[3] она совпадает с *запаздывающим пропагатором* классического уравнения Клейна-Гордона! В действительности же, это самое общее свойство — такого рода выражения работают в самых разных теориях поля.

Фейнмановский пропагатор

При построении теории возмущений естественным образом возникает такой объект, как T-упорядочение (оно же *хронологическое упорядочение*, или *временнОе упорядочение*). Этот объект определяется как формальный символ, примеяемый к набору операторов в Гейзенберговском представлении, и упорядочивающий их по убыванию времён:

$$\hat{T}\{\hat{A}(t_1)\hat{B}(t_2)\} = \begin{cases}\hat{A}(t_1)\hat{B}(t_2), & t_1 > t_2\\ \pm\hat{B}(t_2)\hat{A}(t_1), & t_1 < t_2\end{cases} \tag{11}$$

(для бозе-статистики в нижнем знаке равенства ставится «+», для ферми — если операторы $\hat{A}$ и $\hat{B}$ антикоммутируют — «−»). Через него определяется и самый важный объект для квантовой теории поля и диаграмной техники — это *фейнмановская функция Грина* (которую, так же как и запаздывающую, тоже часто называют *причинной*):

$$\boxed{D_F(x-y) = \left\langle\hat{T}\{\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y)\}\right\rangle} \tag{12}$$

Для вычисления её Фурье-образа можно явно раскрыть символ временного упорядочения используя функции Хевисайда $D_F(x-y) \equiv \theta(x^0-y^0)D(x-y) + \theta(y^0-x^0)D(y-x)$; дальнейшее вычисление абсолютно аналогично и прямолинейно:

[2] На самом деле, конечно, даже к виду $-p_z|\boldsymbol{r}|$

[3] В cond-mat запаздывающую функцию Грина часто вводят с дополнительным множителем $-i$, как раз чтобы в уравнении никаких множителей не было

$$D_F(\omega,\boldsymbol{p}) = \frac{1}{2E_{\boldsymbol{p}}}\left(\int_0^\infty dt e^{i\omega t}e^{-iE_{\boldsymbol{p}}t} + \int_{-\infty}^0 dt e^{i\omega t}e^{iE_{\boldsymbol{p}}t}\right) = \frac{1}{2E_{\boldsymbol{p}}}\left(\frac{i}{\omega - E_{\boldsymbol{p}} + i0} - \frac{i}{\omega + E_{\boldsymbol{p}} - i0}\right) =$$

$$= \boxed{\frac{i}{\omega^2 - E_{\boldsymbol{p}}^2 + i0} = \frac{i}{p^2 - m^2 + i0}} \tag{13}$$

Полученный объект уже не обладает свойствами причинности, как запаздывающая функция Грина — в частности, он отличен от нуля во всём пространстве (хотя вне светового конуса — для пространственно-подобных интервалов — он экспоненциально затухает). От запаздывающей функции Грина его отличает только правило обхода полюсов — расположение инфинитезимальной мнимой добавки $i0$ — которое говорит нам о том, что полюса по ω расположены в точках $\omega = \pm\sqrt{E_{\boldsymbol{p}}^2 - i0} = \pm(E_{\boldsymbol{p}} - i0)$ — поэтому полюс $-E_{\mathbf{p}}$ нужно обходить снизу, а полюс $+E_{\mathbf{p}}$ — сверху. Несложно видеть, что полученный объект тоже является функцией Грина классического уравнения Клейна-Гордона:

$$\boxed{(-\partial^2 - m^2)D_F(x) = i\delta^{(4)}(x)} \tag{14}$$

Старшие корреляционные функции

Выше мы обсудили вопрос вычисления, вообще говоря, любых вакуумных средних, и продемонстрировали метод на примере двухточечной корреляционной функции $D(x-y)$. Для четырёхточечной корреляционной функции применения этого метода непосредственно связано с достаточно большой головной болью и большим количеством членов, которые нужно рассматривать (не говоря уж о ещё большем количестве полей). К счастью, такую процедуру можно провести в самом общем виде — и в конечном итоге получить рецепт, который носит название *теоремы Вика*.

Рецепт следующий: нужно рассмотреть все возможные различные *спаривания* — разбиения полей на пары — и каждому спариванию поставить в соответствие произведение двухточечных корреляторов, составленных из спаренных полей; полученный результат просуммировать. Продемонстрируем это на примере четырёхточечной корреляционной функции:

$$\left\langle \hat\phi(x_1)\hat\phi(x_2)\hat\phi(x_3)\hat\phi(x_4)\right\rangle = \left\langle \hat\phi(x_1)\hat\phi(x_2)\right\rangle\left\langle \hat\phi(x_3)\hat\phi(x_4)\right\rangle + \left\langle \hat\phi(x_1)\hat\phi(x_3)\right\rangle\left\langle \hat\phi(x_2)\hat\phi(x_4)\right\rangle + \left\langle \hat\phi(x_1)\hat\phi(x_4)\right\rangle\left\langle \hat\phi(x_2)\hat\phi(x_3)\right\rangle \tag{15}$$

Приведём сразу несколько важных уточнений.

1. Теорема Вика работает в применении не к усреднению по произвольному состоянию, а только к вакууму $|0\rangle$.
2. Она работает для произвольных линейных комбинаций операторов рождения и уничтожения (полевые операторы являются лишь частным случаем). В частности, вместо полевых операторов там могут стоять сами операторы рождения и уничтожения.
3. Немаловажно, теорему Вика можно тривиально модифицировать для случая T-упорядоченных средних: а именно, в правой части достаточно брать Фейнмановские корреляторы. Это несложно понять исходя из того, что T-упорядочение является лишь формальным символом; теорему Вика можно применить и после, собственно, упорядочения.

Фермионы В таком виде формулируется теорема Вика для бозонных операторов. Для фермионов она тоже работает, но с небольшими поправками:

1. Усреднение может происходить не только по вакууму $|0\rangle$, а и по произвольному Слетеровскому детерминанту (или, что эквивалентно, волновой функции в представлении чисел заполнения — но не их линейной комбинации!). Для этого достаточно заметить, что для состояний с числами заполнения $n_k = 1$ можно поменять местами операторы рождения и уничтожения (перейти от *частичного* к *дырочному* представлению) — ввести $\hat a' = \hat a^\dagger$ и $\hat a'^\dagger = \hat a$, так что числа заполнения станут нулевыми $\hat n' = \hat a'^\dagger \hat a' = \hat a \hat a^\dagger = 1 - \hat a^\dagger \hat a = 1 - \hat n$; а состояние в новом представлении станет вакуумом $|0\rangle$.
2. Поскольку фермионные операторы антикоммутируют, то при замене $\hat\psi^{(-)}\hat\psi^{(+)} = \{\hat\psi^{(-)}, \hat\psi^{(+)}\} - \hat\psi^{(+)}\hat\psi^{(-)}$ перед некоторыми членами будет возникать знак «минус». В действительности же, перед каждым членом стоит дополнительный фактор $(-1)^P$ — знак соответствующей *перестановки*; эквивалентно, P — число перестановок, которые необходимо совершить, чтобы привести операторы к такому порядку, что «спаренные» операторы окажутся рядом в том-же порядке. В частности, для четырёхточечного коррелятора изменился бы знак перед вторым членом:
$$\left\langle \hat\phi(x_1)\hat\phi(x_2)\hat\phi(x_3)\hat\phi(x_4)\right\rangle_{Fermi} = \left\langle \hat\phi(x_1)\hat\phi(x_2)\right\rangle\left\langle \hat\phi(x_3)\hat\phi(x_4)\right\rangle - \left\langle \hat\phi(x_1)\hat\phi(x_3)\right\rangle\left\langle \hat\phi(x_2)\hat\phi(x_4)\right\rangle + \left\langle \hat\phi(x_1)\hat\phi(x_4)\right\rangle\left\langle \hat\phi(x_2)\hat\phi(x_3)\right\rangle \tag{16}$$
3. Такое определение согласовано с выбором знака «$-$» в определении T-упорядочения, поэтому теорема Вика не требует никаких модификаций для случая T-упорядоченных корреляторов.