

Задачи к лекции «Диаграммная техника Фейнмана»

Побойко Игорь

5 апреля 2017

Упражнения

В этих упражнениях рассматривается вещественная теория Клейна-Гордона с возмущением вида ϕ^4 .

Упражнение 1. Теорема Вика и симметричные факторы

Рассмотрите Фейнмановский пропагатор:

$$D(x-y) = \langle \Omega | \hat{T} \{ \phi(x) \phi(y) \} | \Omega \rangle = \frac{\langle \phi(x) \phi(y) \hat{S} \rangle}{\langle \hat{S} \rangle}, \quad \hat{S} = \mathcal{T} \left\{ \exp \left(-i \frac{\lambda}{4!} \int d^4 z \phi^4(z) \right) \right\} \quad (1)$$

1. Разложите экспоненту вплоть до четвёртого порядка теории возмущений. Нарисуйте все диаграммы для первого и второго порядков, а также только связанные диаграммы в третьем порядке теории возмущений.
2. Вычислите полное количество свёрток, которые соответствуют каждой из диаграмм. Напишите аналитическое выражение для каждой диаграмм, с учётом их найденного симметричного фактора, через невозмущённые пропагаторы Фейнмана $D_0(x-y)$.
3. Повторите те же пункты для знаменателя.

Указание. Числитель В N -том порядке ТВ имеется $4N+2$ полевых операторов и соответственно $(4N+1)!!$ способов спаривания (для $N = 1, 2, 3$ это даёт соответственно 15, 945 и 135135 спариваний).

- В первом порядке должно получиться 2 диаграммы ($3 + 12 = 15$ спариваний)
- Во втором порядке — 7 диаграмм ($9 + 24 + 72 + 72 + 192 + 288 + 288 = 945$ спариваний)
- В третьем порядке должно получиться 10 *связных* диаграмм, из которых две пары практически эквивалентны ($6912 + 2 \cdot 6912 + 10368 + 10368 + 10368 + 2 \cdot 10368 + 20736 + 20736 = 114048$ спариваний; остальные приходятся а диаграммы с вакуумными пузырями)

Указание. Знаменатель В N -том порядке ТВ имеется $4N$ полевых операторов и соответственно $(4N-1)!!$ способов спаривания. В первых трёх порядках это соответственно 3, 105 и 10395 спариваний.

- В первом порядке должна получиться 1 диаграмма (3 спаривания)
- Во втором порядке должны получиться 3 диаграммы ($9 + 24 + 72 = 105$ спариваний)
- В третьем порядке должно получиться 4 связных диаграммы ($1728 + 1728 + 2592 + 3456 = 9504$ спариваний)

Упражнение 2. Экспоненцирование связных диаграмм

Рассмотрите знаменатель — среднее значение от $\hat{S}$ -матрицы.

1. В прошлом выражении вы исследовали знаменатель вплоть до второго порядка теории возмущений. Покажите, что каждая диаграмма с b вакуумными пузырями пропорциональна V_4^b , где $V_4 = V \cdot T$ — четырёхмерный объём системы (V — обычный, трёхмерный объём, а T — время наблюдения за ней).
2. Разложите теперь $\ln \langle \hat{S} \rangle_0$ вплоть до второго порядка теории возмущений. Вычислите всевозможные свёртки и покажите непосредственным вычислением, что диаграммы с более чем одним вакуумным пузырьком полностью сокращаются, а полученный ответ пропорционален V_4 .

Упражнение 3. Собственная энергетическая часть

В этом упражнении мы научимся явное выражение для собственной энергетической части $\Sigma(p)$, с учётом всех необходимых множителей и симметричных факторов.

1. В первом упражнении вы выписывали аналитические формулы для первых двух порядков теории возмущений для Фейнмановского пропагатора (когда работали с числителем); кроме того, мы знаем, что диаграммы с вакуумными пузырями необходимо отбросить. Выпишите в координатном представлении аналитические формулы для двух диаграмм, которые изображены на рисунке.
2. Представьте аналитические выражения в виде следующей свёртки:

$$D_2(x, y) = \int d^4 z_1 d^4 z_2 D_0(x - z_1) (-i) \Sigma^{(2)}(z_1, z_2) D_0(z_2 - y) \quad (2)$$

Выпишите аналитическое выражение для $\Sigma^{(2)}(z_1, z_2)$. Покажите, что первая диаграмма, в частности, пропорциональна $\delta(z_1 - z_2)$, а также что вся собственная энергетическая часть зависит только от разности $z_1 - z_2$.

3. Выпишите выражения для преобразования Фурье $\Sigma(p)$ через Фурье-образы невозмущённой функции Грина $D_0(p)$.
4. Вычислите вклад от первой диаграммы, используя размерную регуляризацию. Он даёт (ультрафиолетово расходящуюся) перенормировку массы частиц из-за взаимодействия.

Задачи

Задача 1. Квантовый ангармонический осциллятор

Квантовая механика может рассматриваться как частный случай квантовой теории поля в $0+1$ измерениях. В данной задаче мы применим методы квантовой теории поля для ангармонического осциллятора — аналога теории «фи-в-четвёртой» в $0+1$ измерениях. Рассмотрите квантовый гармонический осциллятор (см. задачу 1 предыдущего семинара) с возмущением $V_{int} = \frac{\mu}{3!} \phi^3 + \frac{\lambda}{4!} \phi^4$.

1. Выведите правила диаграммной техники для исследуемой теории.
2. Вычислите вакуумные пузыри, покажите, что они пропорциональны времени наблюдения за системой T и найдите поправки к энергии основного состояния $\Delta E_{n=0}$ в первом не исчезающем порядке по μ и λ — $O(\mu^2, \lambda)$.
3. Найдите собственную энергетическую часть $\Sigma(\omega)$ в том-же порядке теории возмущений.
4. Используя уравнение Дайсона, исследуйте, как сместится полюс функции Грина осциллятора $\langle \Omega | \hat{T} \{ \hat{\phi}(t) \hat{\phi}(t') \} | \Omega \rangle$. Функция Грина описывает *одночастичные возбуждения* системы, и поэтому полученное выражение в действительности определяет просто поправку к первому возбуждённому уровню осциллятора $\Delta E_{n=1}$.
5. Сравните все полученные ответы с известными из «обычной» теории возмущений.

Указание все вычисления удобно производить во временном, а не частотном, представлении.

Задача 2. «Обычная» теория возмущений

Рассмотрите одночастичную квантомеханическую задачу с каким-то гамильтонианом $\hat{H} = \hat{H}^{(0)} + \hat{V}$. Как обычно, полный набор собственных состояний невозмущённого гамильтониана $\hat{H}_0$ известен: $\hat{H}_0 |n\rangle = E_n^{(0)} |n\rangle$; будем считать все собственные значения невырожденными. Резольвента, или функция Грина, для оператора $\hat{H}$ определяется стандартным образом как $\hat{G}(E) = (E - \hat{H} + i0)^{-1}$; невозмущённую функцию Грина мы будем называть $\hat{G}^{(0)}(E) = (E - \hat{H}_0 + i0)^{-1}$.

1. Постройте операторный ряд теории возмущений по $\hat{V}$ для величины $\hat{G}$. Соответствующее диаграммное представление членов этого ряда имеет следующий вид:

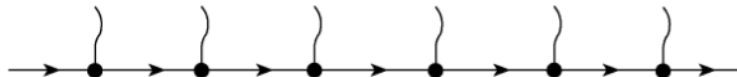


Рис. 1: Диаграммное представление произвольного элемента ряда теории возмущений для $\hat{G}$. Волнистой линии соответствуют операторы $\hat{V}$, а прямой — операторы $\hat{G}_0$.

2. В представлении собственных функций гамильтониана $\hat{H}_0$, невозмущённая функция Грина имеет диагональный вид:

$$\langle n | \hat{G}^{(0)} | m \rangle = G_n^{(0)} \delta_{nm}, \quad G_n^{(0)} = \frac{1}{E - E_n^{(0)} + i0} \quad (3)$$

Запишите ряд теории возмущений для величины $G_n \equiv \langle n | \hat{G} | n \rangle$, выразив его через различные $G_n^{(0)}$, а также матричные элементы V_{nm} . Покажите, что на графическом языке это соответствует следующим «правилам Фейнмана» — каждой линии мы ставим в соответствие число n_i , по которому происходит суммирование; сама линия соответствует $G_{n_i}^{(0)}$; а волнистая линия соответствует $V_{n_i n_j}$, где n_i соответствует левой линии, а n_j — правой.

3. Чтобы вывести «уравнение Дайсона», необходимо привести диаграммный ряд к «одночастично-неприводимому» ряду:

$$G_n = G_n^{(0)} + G_n^{(0)} \Sigma_n G_n^{(0)} + G_n^{(0)} \Sigma_n G_n^{(0)} \Sigma_n G_n^{(0)} + \dots, \quad G_n = \frac{1}{G_n^{(0)-1} - \Sigma_n} = \frac{1}{E - E_n^{(0)} - \Sigma_n(E) + i0} \quad (4)$$

Для этого при суммировании во всех промежуточных состояниях нужно явно выделить член с $n_i = n$ (обозначим его на диаграммном языке линией с чёрточкой) и остальные, с $n_i \neq n$ (которые мы будем обозначать просто прямой линией). В таком случае, на графическом языке необходимо суммировать по всем диаграммам, которые имеют вид, изображённый на рисунке — но при этом каждая линия может быть как с чёрточкой, так и нет. В таком случае в «собственную энергию» Σ_n должны попросту войти все диаграммы «без чёрточек», что соответствует следующему графическому представлению:

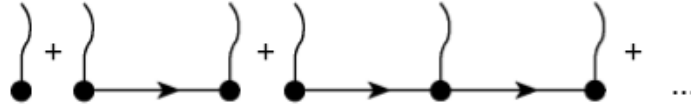


Рис. 2: Диаграммный ряд для Σ_n . Линии соответствуют $\sum_{n_i \neq n} G_{n_i}^{(0)}$, а волнистые линии соответствуют $V_{n_i n_j}$

4. Напишите явно выражение для Σ_n вплоть до второго порядка теории возмущений, и выпишите соответствующее выражение для пропагатора G_n .
5. По построению, полюса функции Грина $\hat{G}$ соответствуют собственным числам полного гамильтониана $\hat{H}$ — а значит, точные уровни энергии E_n определяются из уравнения

$$G_n^{-1}(E_n) = 0 \Rightarrow E_n = E_n^{(0)} + \Sigma_n(E_n) \quad (5)$$

Это трансцендентное уравнение уже можно достаточно просто решить с учётом малости матричных элементов V с нужной точностью (которая должна соответствовать той же точности, с которой вы вычислили $\Sigma_n(E)$). Решите его и покажите, что его решение воспроизводит известные формулы для первых двух поправок по теории возмущений к собственным значениям.