

Задачи к лекции «Интеграл по траекториям в квантовой теории поля»

Побойко Игорь

19 апреля 2017

Упражнения

Упражнение 1. Задача для младенца

Рассмотрите «нульмерную теорию поля» ϕ^4 , производящий функционал для которой определяется следующим образом:

$$Z(j) = \int_{-\infty}^{\infty} d\phi e^{-\frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4 + ij\phi}$$

1. Используя дифференцирование по параметру, вычислите ϕ^{2n} для невозмущённой теории ($\lambda = 0$, $j = 0$). Альтернативно, вычислите его, используя теорему Вика.
2. Изучите поправки произвольного n -того порядка теории возмущений по λ к «пропагатору» $\langle \phi^2 \rangle$, и постройте диаграммную технику для её вычисления.
3. Найдите поправку произвольного порядка к $Z(0)$. Покажите, что ряд асимптотический, просуммируйте его оптимально и найдите его суперасимптотику.

Источник Зи, глава 1.7, «Задача для младенца».

Упражнение 2. Пропагатор фотона

Используя интеграл по траекториям, вычислите пропагатор фотона $D_{\mu\nu}(x-y) = \langle A_\mu(x)A_\nu(y) \rangle$ для электромагнетизма, описываемого следующим действием:

$$S[A_\mu] = -\frac{1}{4} \int d^4x F_{\mu\nu}(x)F_{\mu\nu}(x), \quad F_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x) \quad (1)$$

Соответствующий оператор имеет нулевую моду, что связано с калибровочной симметрией действия $S[A_\mu + \nabla\alpha] \equiv S[A_\mu]$, поэтому непосредственно обратить его невозможно. Для того, чтобы «обойти» эту проблему, можно ввести «фиксирующий калибровку» (gauge fix) и нарушающий калибровочную инвариантность член в действие:

$$S_{GF}[A_\mu, \xi] = -\frac{1}{2\xi} \int d^4x (\partial_\mu A_\mu)^2 \quad (2)$$

(например, предел $\xi \rightarrow 0$ соответствует калибровке Лоренца $\partial_\mu A_\mu = 0$).

Литература Обсуждение такого способа фиксации калибровки можно найти на английской Википедии https://en.wikipedia.org/wiki/Gauge_fixing#R.CE.BE.gauges; обсуждение проблемы квантования электромагнитного поля также есть в ПШ, стр. 93.