Интеграл по траекториям в многочастичной квантовой механике

Побойко Игорь

26 апреля 2017

Когерентные состояния

В многочастичной квантовой механике, в отличии от, например, рассматриваемой ранее теории Клейна-Гордона, отправной точкой является не Лагранжев формализм и функционал действия, а представление вторичого квантования и операторы рождения и уничтожения частиц. Для неё, тем не менее, тоже можно построить представление функционального интеграла, слегка модифицировав обсуждаемую ранее схему. Как и ранее, мы будем дискретизовать время, представляя оператор эволюции $\hat{U}(t) = \exp(-i\hat{H}t)$ в виде произведения N операторов $\hat{U}(\epsilon = \frac{t}{N})$, между которыми мы будем вставлять единичные операторы в виде разложения по некоторому набору. В отличии от координатного и импульсного базиса, для многочастичной квантовой механики оказываются удобными «когерентные состояния» — собственные состояния оператора уничтожения $\hat{a}$ (через которые записывается гамильтониан). Давайте напомним, что они из себя представляют.

Бозонные когерентные состояния

Пусть есть собственная функция оператора уничтожения $\hat{a}$ с собственным числом $\phi \in \mathbb{C}$:

$$\hat{a}\left|\phi\right\rangle = \phi\left|\phi\right\rangle, \quad \left\langle\phi\right|\hat{a}^\dagger = \left\langle\phi\right|\bar{\phi} \tag{1}$$

Состояние $\left|\phi\right\rangle$ в таком случае может быть построено явно:

$$\left|\phi\right\rangle = e^{\phi\hat{a}^\dagger}\left|0\right\rangle = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\phi^n}{\sqrt{n!}}\left|n\right\rangle \tag{2}$$

Когерентные состояния не образуют ортонормированную систему; можно вычислить перекрытие двух когерентных состояний:

$$\left\langle\theta|\phi\right\rangle = \exp(\bar{\theta}\phi) \tag{3}$$

Кроме того, они образуют переполненный набор; это означает, что разложение единицы имеет следующий вид:

$$\hat{\mathbb{I}} = \int \underbrace{\frac{d(\mathrm{Re}\phi)d(\mathrm{Im}\phi)}{\pi}}_{\equiv d\bar{\phi}d\phi} e^{-|\phi|^2}\left|\phi\right\rangle\left\langle\phi\right| \tag{4}$$

Все полученные свойства тривиально обобщаются и на произвольное количество бозонных состояний (как, собственно, и бывает в многочастичной квантовой механике), описываемых каким-то набором операторов $\hat{a}_n$ с коммутационными соотношениями $[\hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger] = \delta_{ij}$.

Фермионные когерентные состояния

Фермионы устроены чуть сложнее — ведь если $\left|\eta\right\rangle$ является собственным для оператора уничтожения $\hat{a}\left|\eta\right\rangle = \eta\left|\eta\right\rangle$, то в силу принципа Паули $\hat{a}^2 = 0$, что неизбежно влечёт $\eta^2 = 0$. Кроме того, фермиевские операторы антикоммутируют. Всё это приводит нас к мысли о том, что для построения фермионных когерентных состояний нужна специальная алгебра — алгебра *грассмановых чисел*.

Лирическое отступление. Грассмановы числа

Грассманову алгебру мы введём формальным образом как алгебру антикоммутирующих чисел. Пусть имеется набор грассмановых чисел $\{\eta_i\}_{i=1}^N$.

1. Основным свойством их мы положим антикоммутативность по отношению к произведению:

$$\eta_i\eta_j = -\eta_j\eta_i \tag{5}$$

Ассоциативность $\eta_1(\eta_2\eta_3) = (\eta_1\eta_2)\eta_3$ и дистрибутивность $\eta_1(\eta_2+\eta_3) = \eta_1\eta_2 + \eta_1\eta_3$ по-прежнему выполняются.

2. Непосредственно из определения следует то, что квадрат произвольного грассманового числа равен нулю $\eta^2 = 0$. Кроме того, *пары* грассмановых чисел (или любое их чётное количество) ведут себя как обычные числа — коммутируют со всеми; например, $\eta_1(\eta_2\eta_3) \equiv (\eta_2\eta_3)\eta_1$.

3. Помимо перемножения, их числа можно складывать и домножать на обычные $\mathbb{C}$-числа. Число самого общего вида тем самым можно представить как произвольную линейную комбинацию следующих 2^N объектов (то есть мы имеем дело с линейным пространством со следующими «базисными векторами»):
$$\{1, \quad \eta_1, \ldots, \eta_N, \quad \eta_1\eta_2, \eta_1\eta_3, \ldots, \eta_{N-1}\eta_N, \quad \ldots, \quad \eta_1 \ldots \eta_N\} \tag{6}$$

4. Мы можем определить действие произвольной аналитической функции на грассманово число η через разложение в ряд Тейлора:
$$\forall c \in \mathbb{C} \mapsto f(c+\eta) = f(c) + f'(c) \cdot \eta \tag{7}$$
(все следующие члены зануляются).

5. Исходя из предыдущего свойства, мы можем формально ввести операцию *дифференцирования* по грассмановому числу через определение:
$$\frac{\partial}{\partial \eta_i}\eta_j = \delta_{ij} \tag{8}$$
Кроме дифференцирования, по грассмановым числам можно также и *интегрировать*, причём эти две операции тождественно совпадают:
$$\int d\eta_i \eta_j = \delta_{ij} \tag{9}$$
(стоит обратить внимание, что в таком случае для кратных интегралов «дифференциалы» $d\eta$ тоже антикоммутируют: $\int d\eta_1 d\eta_2 \eta_1 \eta_2 = -\int d\eta_1 \underbrace{\int d\eta_2 \eta_2}\, \eta_1 = -\int d\eta_1 \eta_1 = -1$, что эквивалентно $\int d\eta_1 d\eta_2 \eta_1 \eta_2 = -\int d\eta_2 \underbrace{d\eta_1 \eta_1}\, \eta_2 = -\int d\eta_2 \eta_2 = -1$). В частности, $\frac{\partial}{\partial \eta_i} 1 = \int d\eta_i \cdot 1 = 0$.

6. Можно ввести операцию *комплексного сопряжения* для грассмановых чисел $\bar{\eta}_i$ — её мы просто определим как дающую независимое грассманово число, так что $\bar{\bar{\eta}}_i = \eta_i$. В таком смысле, грассмановых чисел попросту удваивается $\{\eta_1, \ldots, \eta_N, \bar{\eta}_1, \ldots, \bar{\eta}_N\}$.

7. Наконец, можно вычислить гауссов грассманов интеграл:
$$\int \prod_i (d\bar{\eta}_i d\eta_i) e^{-\sum_{ij} \bar{\eta}_i L_{ij} \eta_j} = \det L \tag{10}$$
Можно просто это проверить для диагональной матрицы:
$$\int \prod_i (d\bar{\eta}_i d\eta_i) \exp(-\sum_i \lambda_i \bar{\eta}_i \eta_i) = \int \prod_i (d\bar{\eta}_i d\eta_i) \prod_i \exp(-\lambda_i \bar{\eta}_i \eta_i) = \int \prod_i (d\eta_i d\bar{\eta}_i \cdot (1 - \lambda_i \bar{\eta}_i \eta_i)) = \prod_i \lambda_i \tag{11}$$
Тут мы в первом равенстве воспользовались тем, что пары грассмановых чисел ведут себя как обычные числа, а во втором — взятием экспоненты от грассманового числа[1].

Продолжение

Итак, продолжим наше построение когерентных состояний, вооружившись грассмановой алгеброй. Мы выяснили, что собственное число фермионного оператора уничтожения обязано быть грассмановым; с учётом нашего определения для комплексного сопряжения, имеем:
$$\hat{a}\,|\eta\rangle = \eta\,|\eta\rangle\,, \quad \langle\eta|\,\hat{a}^\dagger = \langle\eta|\,\bar{\eta}$$

Для такого состояния тоже работает выражение через экспоненту:
$$|\eta\rangle = e^{\eta\hat{a}^\dagger}\,|0\rangle = (1 + \eta\hat{a}^\dagger)\,|0\rangle = |0\rangle + \eta\,|1\rangle \tag{12}$$

С учётом нашего определения комплексного сопряжения, мы также имеем $\langle\eta| = \langle 0| + \langle 1|\,\bar{\eta}$ и $\langle\eta|\,\hat{a}^\dagger = \langle\eta|\,\bar{\eta}$. Перекрытие когерентных состояний равно:
$$\langle\eta_i|\eta_j\rangle = (\langle 0| + \langle 1|\,\bar{\eta}_i)\,(|0\rangle + \eta_j\,|1\rangle) = 1 + \bar{\eta}_i\eta_j = \exp(\bar{\eta}_i\eta_j) \tag{13}$$

[1] Сравните с обычными числами, для которых гауссов интеграл имеет вид $\int \prod_i (d\bar{z}_i dz_i) \exp(-\sum_{ij} \bar{z}_i L_{ij} z_j) = (\det L)^{-1}$ (если мы определили $d\bar{z}_i dz_i \equiv \frac{1}{\pi} d(\mathrm{Re} z_i) d(\mathrm{Im} z_i)$). На этом основана идея суперсимметрии — если взять одинаковое число грассмановых и обычных чисел, то, скажем, гауссов интеграл будет вообще равен единице.

Кроме того, также работает и разложение единицы:

$$\hat{\mathbb{I}} = \int d\bar{\eta}d\eta e^{-\bar{\eta}\eta} |\eta\rangle \langle\eta| = \int d\bar{\eta}d\eta(1-\bar{\eta}\eta)(|0\rangle + \eta\,|1\rangle)(\langle 0| + \bar{\eta}\,\langle 1|) = |0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1| \tag{14}$$

Таким образом, фермионные когерентные состояния устроены абсолютно точно так же, как и бозонные — за исключением того, что они даются грассмановыми числами (различие имеется разве что в множителе π в определении $d\bar{\phi}d\phi$).

Интеграл по траекториям

С учётом всего вышесказанного, давайте вернёмся к многочастичной квантовой механике. Рассмотрим для простоты гамильтониан квантового осциллятора $\hat{H} = \omega\hat{a}^\dagger\hat{a}$ (рассмотрение мы будем вести для бозонов и фермионов одновременно — ведь когерентные состояния устроены одинаково!), а затем проведём тривиальное обобщение на произвольный многочастичный гамильтониан. Как обычно, мы стартуем с пропагатора, который определим как амплитуду перехода между двумя когерентными состояниями:

$$G_R(\phi,\phi',T>0) = \langle\phi|\, e^{-i\hat{H}T}\, |\phi'\rangle \tag{15}$$

Будем действовать стандартным образом, вставляя разложение единиц по когерентным состояниям:

$$G_R(\phi,\phi',T) = \int \prod_{k=1}^{N-1} \left(d\bar{\phi}_k d\phi_k \exp(-\bar{\phi}_k\phi_k)\right) \langle\phi_N \equiv \phi|\, e^{-i\hat{H}\epsilon}\, |\phi_{N-1}\rangle \ldots \langle\phi_2|\, e^{-i\hat{H}\epsilon}\, |\phi_1\rangle \langle\phi_1|\, e^{-i\hat{H}\epsilon}\, |\phi_0 \equiv \phi'\rangle \tag{16}$$

Если гамильтониан $\hat{H} = H(\hat{a}^\dagger,\hat{a})$ нормально упорядочен (и только тогда!), матричные элементы считаются прямолинейно:

$$\langle\phi_{k+1}|\, e^{-i\hat{H}\epsilon}\, |\phi_k\rangle \approx \langle\phi_{k+1}|\,(1 - iH(\hat{a}^\dagger,\hat{a})\epsilon)\,|\phi_k\rangle = \langle\phi_{k+1}|\phi_k\rangle \cdot (1 - iH(\bar{\phi}_{k+1},\phi_k)\epsilon) \approx \exp(\bar{\phi}_{k+1}\phi_k - iH(\bar{\phi}_{k+1},\phi_k)\epsilon) \tag{17}$$

И, наконец, для пропагатора мы получаем следующее выражение:

$$\boxed{G_R(\phi,\phi',T) = \int \prod_{k=1}^{N-1} d\bar{\phi}_k d\phi_k \exp\left(-\sum_{k=1}^{N-1}\bar{\phi}_k\phi_k + \sum_{k=1}^{N}\bar{\phi}_k\phi_{k-1} - i\epsilon\sum_{k=1}^{N} H(\bar{\phi}_k,\phi_{k-1})\epsilon\right)} \tag{18}$$

Для данного выражение непосредственно строится и непрерывный предел. Интегрирование происходит по всем комплексным (для бозонов) или грассмановым (для фермионов)[2] функциям $\phi(t)$ с закреплёнными концами $\phi(t=0)=\phi'$ и $\phi(t=T)=\phi$; а действие имеет следующий вид:

$$\boxed{G_R(\phi,\phi',T) = \int_{\phi(0)=\phi'}^{\phi(T)=\phi} \mathcal{D}[\bar{\phi}(t),\phi(t)] \cdot e^{iS[\bar{\phi}(t),\phi(t)]}, \quad S = \int dt\left(i\bar{\phi}\partial_t\phi - H(\bar{\phi}(t),\phi(t))\right)} \tag{19}$$

Наконец, используя рассуждения предыдущей лекции, мы можем от пропагатора перейти сразу к многочастичной квантовой механике (вместо одного состояния) и квантовой теории поля, а также к вычислению средних по основному состоянию. Скажем, для частиц с парным взаимодействием с потенциалом $U(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})$ многочастичный гамильтониан имел вид:

$$\hat{H} = \int d\boldsymbol{x}\frac{1}{2m}\nabla\hat{\psi}^\dagger(\boldsymbol{x})\nabla\hat{\psi}(\boldsymbol{x}) + \int d\boldsymbol{x}d\boldsymbol{y}\hat{\psi}^\dagger(\boldsymbol{x})\hat{\psi}^\dagger(\boldsymbol{y})U(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\hat{\psi}(\boldsymbol{y})\hat{\psi}(\boldsymbol{x}), \tag{20}$$

и, скажем, Фейнмановский пропагатор запишется следующим образом:

$$\boxed{\langle\Omega|\,\mathcal{T}\{\hat{\psi}(\boldsymbol{x},t)\hat{\psi}^\dagger(\boldsymbol{y},t')\}\,|\Omega\rangle = \frac{\int\mathcal{D}[\bar{\psi},\psi]\cdot\psi(\boldsymbol{x},t)\bar{\psi}(\boldsymbol{y},t')\exp\left(i\int dt\cdot L[\bar{\psi},\psi]\right)}{\int\mathcal{D}[\bar{\psi},\psi]\exp\left(i\int dt\cdot L[\bar{\psi},\psi]\right)}} \tag{21}$$

$$L = \int d\boldsymbol{x}\left(i\bar{\psi}\partial_t\psi - \frac{|\nabla\psi|^2}{2m}\right) - \frac{1}{2}\int d\boldsymbol{x}d\boldsymbol{y}|\psi(\boldsymbol{x},t)|^2|\psi(\boldsymbol{y},t)|^2U(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \tag{22}$$

Прелесть в том, что в правой части поля $\psi(\boldsymbol{x},t)$ — это уже обычные (для фермионов — грассмановы) числа, которые устроены куда проще операторов. Из этого представления также тривиально показывается, что Фейнмановский пропагатор является функцией Грина оператора $i\partial_t - \hat{H}$ — то, что мы получали ранее непосредственным вычислением. Кроме того, тот факт, что поля ψ для фермионов грассмановы полностью согласуется с возникновением знака «минус» в определении $\mathcal{T}$-упорядочения фермионных операторов.

[2] Конечно, грассманова алгебра хорошо определена для счётного количества грассмановых переменных, и такой объект как грассманова функция порой может смущать (например, $\phi^2(t)=0$, но $\lim_{\epsilon\to0}\phi(t+\epsilon)\phi(t) = ?$). Чтобы понять, какой смысл вкладывается в то или иное выражение, стоит возвращаться к дискретному представлению, где всё хорошо определено.

Большой канонический ансамбль

Будучи построенным так, функциональный интеграл даёт среднее по состоянию с минимальной энергией полного гамильтониана $\hat{H}$. Даже для взаимодействющих частиц, скажем, с отталкиванием, это основное состояние устроено тривиально как $|\Omega\rangle = |0\rangle$ (и $\hat{H}|0\rangle = 0$) — но это совершенно не то, что нам интересно! Как правило, мы интересуемся *условным минимумом* — а именно, нас интересует основное состояние с фиксированным числом частиц — с дополнительным условием $\langle\Omega|\hat{N}|\Omega\rangle = N$. К счастью, полученная схема достаточно просто модифицируется и для этой задачи — с использованием множителей Лагранжа:

$$\min_{\forall\psi:\langle\psi|\hat{N}|\psi\rangle=N}\langle\psi|\hat{H}|\psi\rangle \Leftrightarrow \min_{\forall\psi}\langle\psi|\hat{H}-\mu\hat{N}|\psi\rangle \text{ and } \langle\psi|\hat{N}|\psi\rangle = N \tag{23}$$

Задача на условный минимум $E(\psi) = \langle\psi|\hat{H}|\psi\rangle$ при дополнительным условии $N(\psi) = \langle\psi|\hat{N}|\psi\rangle = N$ тем самым эквивалентна нахождению *безусловного* минимума модифицированного функционала $\hat{H}' = \hat{H} - \mu\hat{N}$, где множитель Лагранжа μ должен быть найден из условия $\langle\psi|\hat{N}|\psi\rangle = N$. Последний же уже можно найти с помощью аппарата функционального интегрирования.

В статистической физике величина μ носит название *химического потенциала*, а ансамбль систем с фиксированным химическим потенциалом носит название *большого канонического ансамбля*. Он противопоставляется *каноническому ансамблю* — ансамблю систем с фиксированным числом частиц; и в термодинамическом пределе они эквивалентны. Поэтому сухой остаток такой: если число частиц сохраняется, то для использования аппарата функционального интегрирования необходимо гамильтониан заменить на «большой канонический гамильтониан» $\hat{H}' = \hat{H} - \mu\hat{N}$.

Слабонеидеальный Бозе-газ

Постановка задачи

В качестве демонстрации методов функционального интегрирования, мы рассмотрим Бозе-газ с фиксированным числом частиц и точечным взаимодействием $U(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) = g\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})$ между частицами, описываемый следующим гамильтонианом:

$$\hat{H}' = \int d\boldsymbol{x}\left(\frac{\nabla\hat{\Psi}^\dagger\nabla\hat{\Psi}}{2m} - \mu\hat{\Psi}^\dagger\hat{\Psi} + \frac{g}{2}\hat{\Psi}^\dagger\hat{\Psi}^\dagger\hat{\Psi}\hat{\Psi}\right) \tag{24}$$

«Статсумма» функционального интеграла имеет следующий вид:

$$Z = \int\mathcal{D}[\bar{\Psi},\Psi]\exp\left(i\int dtd\boldsymbol{x}\left[i\bar{\Psi}\partial_t\Psi - \frac{|\nabla\Psi|^2}{2m} + \mu|\Psi|^2 - \frac{g}{2}|\Psi|^4\right]\right) \tag{25}$$

Коденсат

Рассмотрение системы мы проведём с помощью метода перевала. Обычно, когда мы имели дело с «хорошими» теориями поля типа «фи-в-четвёртой», седловое решение было тривиально — $\phi = 0$. В данном же случае, варьируя действие по $\bar{\Psi}$, мы получаем, что седловая конфигурация удовлетворяет так называемому уравнению Гросса-Питаевского (нелинейному уравнению Шрёдингера с отталкиванием):

$$i\partial_t\psi + \frac{\Delta\psi}{2m} + \mu\psi - g|\psi|^2\psi = 0 \tag{26}$$

Седловое решение мы будем называть «конденсатной волновой функцией»; пусть вас это не смущает, к обычным бозонным волновым функциям это не имеет отношения. В однородном (без внешнего потенциала) и стационарном (без возмущающих сил) случае ψ само не зависит ни от пространственных координат, ни от временных, и нам достаточно мнимизировать лишь «потенциал» $U(|\psi|^2) = -\mu|\psi|^2 + \frac{g}{2}|\psi|^4$. При $\mu, g > 0$ такой потенциал носит название «мексиканской шляпы», и он имеет целый вырожденный континуум минимумов, параметризуемых $U(1)$-фазой ϕ:

$$|\psi_0|^2 = \frac{\mu}{g} \Rightarrow \psi_0 = \sqrt{\frac{\mu}{g}}e^{i\phi}, \quad U_0 = -\frac{\mu^2}{2g} \tag{27}$$

Наличие такого макроскопического вырождения — прямое следствие наличия $U(1)$ симметрии исходного действия — симметрии по отношению к фазовым вращениям $\psi \mapsto \psi e^{i\phi}$. Последняя, в свою очередь, по теореме Нётер связано с сохранением числа частиц $|\psi|^2$. Можно было бы предположить, что система «растечётся» по минимуму неким симметричным образом, и будет даваться линейной комбинацией минимумов с различными фазами; *истинное* основное состояние устроено именно так. Однако в действительности же оказывается, что такое «растекание» происходит за экспоненциально большое (по размеру системы) время, то есть в термодинамическом пределе — никогда; и в результате, опять же в термодинамическом пределе мы имеем дело с континуумом основных состояний, среди которых система выбирает какое-то одно конкретное. В таких случаях говорят о *спонтанном нарушении симметрии* (в данном случае речь идёт об $U(1)$-симметрии), что практически всегда связано с фазовыми переходами второго рода[3].

Основное состояние

Мы приходим к выводу, что в рамках седлового приближения, в системе образуется *Бозе-конденсат* $\psi_0(\boldsymbol{x}, t)$, удовлетворяющий уравнению Гросса-Питаевского. Это значит, что в рамках всё того же седлового приближения имеется ненулевое *аномальное среднее* $\langle\Omega|\,\hat{\Psi}(\boldsymbol{x}, t)\,|\Omega\rangle = \psi_0(\boldsymbol{x}, t)$ — объект, который в «нормальных» теориях попросту не может существовать в силу закона сохранения числа частиц, но который возникает в рамках такого седлового рассмотрения. Появление аномального среднего является одним из признаков Бозе-конденсации[4]; последняя происходит тогда, когда *макроскопически большое* (пропорциональное объёму системы) число частиц скапливается в одном квантомеханическом состоянии[5]. При конечных температурах она происходит тогда, когда химический потенциал μ (зависящий, вообще говоря, от температуры) оказывается положительным $\mu \geq 0$.

В рамках того же седлового приближения, полное число частиц в системе равно $N = \langle\Omega|\,\hat{N}\,|\Omega\rangle \simeq \int d\boldsymbol{x}|\psi_0(\boldsymbol{x})|^2 = \frac{\mu}{g}V$ — откуда можно найти связь химического потенциала и числа частиц при нуле температур, $\mu = gn$. Хорошим анзацем для основного состояния, обладающим необходимым свойством наличия аномальных средних, является *когерентное состояние* — состояние, собственное для оператора уничтожения[6]:

$$|\Omega\rangle \simeq |\psi_0\rangle = \exp\left(\int d\boldsymbol{x}\psi_0(\boldsymbol{x})\hat{\Psi}^\dagger(\boldsymbol{x})\right)|0\rangle\,, \quad \hat{\Psi}(\boldsymbol{x})\,|\psi_0\rangle = \psi_0(\boldsymbol{x})\,|\psi_0\rangle \tag{28}$$

Поучительным оказывается вычисления перекрытия двух состояний с различными фазами конденсата:

$$\left\langle\psi_0 e^{i\phi}|\psi_0\right\rangle = \exp\left(e^{-i\phi}\int d\boldsymbol{x}|\psi_0(\boldsymbol{x})|^2\right) \Rightarrow P = \frac{\left|\left\langle\psi_0 e^{i\phi}|\psi_0\right\rangle\right|^2}{\langle\psi_0 e^{i\phi}|\psi_0 e^{i\phi}\rangle\cdot\langle\psi_0|\psi_0\rangle} = \exp\left(-2N(1-\cos\phi)\right) \tag{29}$$

Это вычисление и демонстрирует, что такие когерентные состояния в термодиамическом пределе становятся ортогональными друг другу, а время перехода между состояниями с различными фазами для конечных систем экспоненциально велико.

Звук

Для систем со спонтанным нарушением симметрии имеется утверждение, которое носит название *теоремы Голдстоуна*: каждому генератору нарушенной симметрии соответствует некоторая мягкая (то есть безщелевая $\omega(k\to 0)\to 0$) мода. В Бозе-газе роль это звуковая мода с линейным законом дисперсии $\omega(k) = ck$, и в её наличии можно убедиться из простых термодинамических соображений. При нуле температур, *термодинамический потенциал* системы $\Omega = F - \mu N = E - TS - \mu N = -\frac{\mu^2}{2g}V$; с другой же стороны из термодинамики известно, что $\Omega = -PV$, поэтому давление такой системы равно $P = \frac{\mu^2}{2g} = \frac{gn^2}{2}$. Скорость же звука опять-же можно найти из известного термодинамического соотношения:

$$c^2 = \frac{\partial P}{\partial\rho} = \frac{1}{m}\frac{\partial P}{\partial n} = \frac{gn}{m} = \frac{\mu}{m} \tag{30}$$

Поучительно продемонстрировать явно наличие такой моды с использованием формализма функционального интегрирования. Для этого предлагается сделать нелинейную(!) замену переменных в функциональном интеграле следующего вида:

$$\Psi(\boldsymbol{x}, t) = \sqrt{\rho(\boldsymbol{x}, t)}e^{-i\varphi(\boldsymbol{x}, t)}, \tag{31}$$

и вместо интегрирования по $\mathcal{D}[\bar{\Psi}, \Psi]$ проводит интегрирование по всем положительным функциям $\rho(\boldsymbol{x}, t) > 0$ и по всем функциям $\varphi(\boldsymbol{x}, t) \in U(1)$ (фазы φ и $\varphi + 2\pi$ тождественны!). В общем случае замена переменных в функциональном интеграле может привести к возникновению ненулевого *якобиана перехода*. Однако данная конкретная замена имеет единичный якобиан, в чём можно убедиться, вернувшись с дискретному представлению в пространстве-времени:

$$d\bar{\Psi}d\Psi = d(\mathrm{Re}\Psi)d(\mathrm{Im}\Psi) = |\Psi|d(|\Psi|)d(\arg\Psi) = \sqrt{\rho}\frac{d\rho}{2\sqrt{\rho}}d\varphi = \frac{1}{2}d\rho d\varphi \Rightarrow \mathcal{D}[\bar{\Psi}, \Psi] \equiv \mathcal{D}[\rho, \varphi] \tag{32}$$

---

[3]Другим простым примером спонтанного нарушения симметрии является ферромагнетизм — хотя исходно в обычных ферромагнетиках нет никакой выделенной оси и в этом смысле оно изотропно (обладает $O(3)$ вращательной симметрией), но при низких температурах оно приобретает конечную намагниченность, направленную в каком-то выделенном направлении — симметрия спонтанно нарушается

[4]С точки зрения теории фазовых переходов Ландау, аномальное среднее является *параметром порядка* соответствующего фазового перехода

[5]Даже если число частиц строго фиксировано и никакого аномального среднего нет, наличие или отсутствие конденсата можно выяснить по возникновению *дальнего порядка* — асимптотики корреляционной функции $\langle\Omega|\,\psi(\boldsymbol{x})\psi^\dagger(\boldsymbol{y})\,|\Omega\rangle \to \psi_0(\boldsymbol{x})\psi_0^*(\boldsymbol{y})$ при $|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|\to\infty$.

[6]Мы с этими состояниями уже сталкивались выше, когда строили представление функционального интеграла для многочастичной квантовой механики. Именно в контексте конденсации Бозе-Эйнштейна становится понятно, о какой именно когерентности речь — оно так называется как раз потому, что представляет собой хороший анзац для основного состояния конденсата.

(как обычно, константа $1/2$ нас совершенно не интересует — она войдёт в нормировку). Непосредственной подстановкой мы получаем следующий Лагранжиан:

$$S[\varphi,\rho]=\int dtd\boldsymbol{x}\left[\cancelto{0}{\frac{i}{2}\partial_t\rho}+\rho\partial_t\varphi-\frac{1}{2m}\left(\frac{(\nabla\rho)^2}{4\rho}+\rho(\nabla\varphi)^2\right)+\mu\rho-\frac{g}{2}\rho^2\right] \tag{33}$$

(первый член является полной производной и нас не интересует). Из такого представления видно, что фаза и плотность являются канонически сопряжёнными координатой и импульсом: $\rho=\frac{\partial L}{\partial(\partial_t\phi)}$; поэтому можно было бы продолжить рассмотрение, используя операторный формализм с следующим гамильтонианом, описывающим уже *коллективные возбуждения*:

$$\hat{H}=\frac{1}{2m}\left(\frac{(\nabla\rho)^2}{4\rho}+\rho(\nabla\varphi)^2\right)-\mu\rho+\frac{g}{2}\rho^2,\quad [\hat{\phi}(\boldsymbol{x}),\hat{\rho}(\boldsymbol{y})]=i\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \tag{34}$$

Мы же пройдём чуть дальше и разложимся вблизи седла $\rho=\rho_0+\delta\rho$ до квадратичного порядка по $\delta\rho$ и производным фазы φ:

$$S[\varphi,\delta\rho]=\int dtd\boldsymbol{x}\left[\delta\rho\cdot\partial_t\varphi-\frac{1}{8m\rho_0}(\nabla\delta\rho)^2-\frac{g}{2}\delta\rho^2-\frac{\rho_0}{2m}(\nabla\varphi)^2\right] \tag{35}$$

Теперь мы можем взять Гауссов функциональный интеграл по флуктуациям плотности, чтобы получить эффективное действие, описывающее флуктуации фазы. Интеграл устроен как гауссов источником $\partial_t\varphi$, и, как мы помним из предыдущего семинара, ответ выражается через функцию Грина соответствующей квадратичной части:

$$\int\mathcal{D}\delta\rho\cdot\exp\left(i\int dtd\boldsymbol{x}\left(-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{4m\rho_0}(\nabla\delta\rho)^2+g\cdot\delta\rho^2\right]+\delta\rho\partial_t\varphi\right)\right)=\exp\left(\frac{i}{2}\int dtd\boldsymbol{x}_1d\boldsymbol{x}_2\cdot\partial_t\varphi(\boldsymbol{x}_1,t)G(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2)\partial_t\varphi(\boldsymbol{x}_2)\right) \tag{36}$$

В длинновоновом пределе можно записать $G^{-1}(\boldsymbol{k})=g+\frac{k^2}{4m\rho_0}\approx g\Rightarrow G(\boldsymbol{x})\approx\frac{1}{g}\delta(\boldsymbol{x})$; поэтому после Гауссового интегрирования по плотности мы приходим к следующему действию для флуктуаций фазы:

$$\boxed{S[\varphi]=\frac{1}{2}\int dtd\boldsymbol{x}\left[\frac{1}{g}(\partial_t\varphi)^2-\frac{\rho_0}{m}(\nabla\varphi)^2\right]} \tag{37}$$

Если отвлечься от того, что фаза определена с точностью до[7] 2π (что соответствует тому, что флуктуации фазы мы предполагаем маленькими), то мы получили нашу любимую безмассовую теорию Клейна-Гордона. Тот факт, что она зависит только от производных фазы и не зависит от самой фазы явно, конечно же, связан с той самой $U(1)$ симметрией. «Скорость света» же в этой теории равна скорости звука $c^2=\frac{\rho_0 g}{m}=\frac{\mu}{m}$ — что совпадает с полученным ранее из термодинамических соображений. Полученная бесщелевая мода тем самым связана с длинноволновыми флуктуациями фазы конденсата.

[7] На самом деле, это имеет далеко идущие последствия. В такой системе имеются точечные топологические возбуждения, при обходе вокруг которых фаза меняется на 2π — вихревые нити, с которыми связана очень интересная физика, но которая всё-же выходит за рамки нашего курса.