Классическая теория поля

Антоненко Даниил

7 февраля 2018

Операторный формализм квантовой механики, с которым мы будем работать в дальнейшем в применении к квантовой теории поля, существенно опирается на гамильтоново описание систем. Поэтому в этой лекции мы постараемся напомнить, как строится гамильтониан для классических теорий поля. Проще всего о полях думать как о наборе огромного (в пределе — континуального) набора частиц, так что в каждой точке пространства находится отдельная классическая частица; поэтому начнём мы вообще с классической N-частичной механики.

1 Классическая механика N степеней свободы

Лагранжев формализм

В общем случае классическая система из N степеней свободы описывается набором обобщённых координат $\{q_i\}_{i=1}^N$. В рамках лагранжевого формализма, истинная траектория $\{q_i(t)\}_{i=1}^N$ соответствует экстремали функционала $S[q_i(t)]$, называемого *действием.* В рамках классической механики, действие представляет собой интеграл от *функции Лагранжа* $L(q_i, \dot{q}_i, t)$, представляющей собой разность кинетической и потенциальной энергий:

$$S[q_i(t)] = \int dt \cdot L(q_i(t), \dot{q}_i(t), t) \tag{1}$$

Поиск экстремали функционала сводится к варьированию действия при вариации траектории, и требования зануления первой вариационной производной:

$$\delta S[q_i(t)] = \int dt \cdot (L(q_i + \delta q_i, \dot{q}_i + \delta \dot{q}_i, t) - L(q_i, \dot{q}_i, t)) = \int dt \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right) = \int dt \underbrace{\left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right)}_{\equiv \frac{\delta S}{\delta q_i(t)}} \delta q_i \tag{2}$$

Последнее является тем самым определением вариационной производной. Требования зануления первой вариации даёт *уравнения движения* или *уравнения Эйлера-Лагранжа*:

$$\frac{\delta S}{\delta q_i(t)} = \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0 \tag{3}$$

Гамильтонов формализм

Альтернативой лагранжевому формализму является гамильтонов формализм, который обладает над ним рядом преимуществ, которые изучались в курсе теоретической механики. Для построения гамильтонового формализма первым делом необходимо ввести *канонически сопряжённые импульсы* $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$, и выразить все скорости $\dot{q}_i(t)$ через них; а затем произвести преобразование Лежандра функции Лагранжа, перейдя к функции Гамильтона:

$$H(q_i, p_i, t) \equiv \sum_i p_i \dot{q}_i - L(q_i, \dot{q}_i, t) \tag{4}$$

Уравнения движения — уравнения Гамильтона — в таком случае записываются в следующем виде:

$$\begin{cases} \frac{dq_i}{dt} &= \frac{\partial H(q_i,p_i,t)}{\partial p_i} \\ \frac{dp_i}{dt} &= -\frac{\partial H(q_i,p_i,t)}{\partial q_i} \end{cases} \tag{5}$$

Скобки Пуассона В рамках гамильтонова формализма полезным объектом является *скобка Пуассона.* Она определяются для двух произвольных физических величин $A(q_i, p_i)$ и $B(q_i, p_i)$ согласно соотношению:

$$\{A(q_i, p_i, t), B(q_i, p_i, t)\} \equiv \sum_i \left(\frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial B}{\partial q_i} \right) \tag{6}$$

Среди её свойств можно заметить следующие. Она антикоммутативна и удовлетворяет тождеству Якоби:

$$\{A, B\} + \{B, A\} \equiv 0, \quad \{A, \{B, C\}\} + \{B, \{C, A\}\} + \{C, \{A, B\}\} \equiv 0 \tag{7}$$

Кроме того, несложно заметить следующие соотношения:

$$\{q_i, q_j\} = 0, \quad \{p_i, p_j\} = 0, \quad \{q_i, p_j\} = \delta_{ij} \tag{8}$$

Наконец, через скобку Пуассона очень компактно записывается уравнение эволюции произвольной физической величины:

$$\frac{dA(q_i(t), p_i(t), t)}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + \sum_i \left(\frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{dp_i}{dt} \right) = \frac{\partial A}{\partial t} + \sum_i \left(\frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) = \frac{\partial A}{\partial t} + \{A, H\} \tag{9}$$

Каноническое квантование

Наконец, напомним, как осуществляется переход от классической механики к квантовой. В процедуре *канонического квантования* всем наблюдаемым величинам ставятся в соответствие эрмитовы операторы $A \mapsto \hat{A}$, (действующие в гильбертовом пространстве волновых функций) и постулируется следующая связь между коммутационными соотношениями этих операторов и классической скобкой Пуассона[1]: $[\hat{A}, \hat{B}] \equiv i\{A, B\}$

2 Классическая теория поля

Непрерывный предел О квантовой теории поля можно думать следующим образом. Пусть имеется «матрац»: система из N частиц, каждая из которых находится в реальном пространстве и расположена в какой-то точке $\boldsymbol{x}$. В непрерывном пределе $N \to \infty$ эта система частиц описывается полем $\phi(\boldsymbol{x})$ (тем самым, индекс i, нумеровавший частицы, превращается в непрерывный индекс $\boldsymbol{x}$). Все функции N переменных (вроде функции Лагранжа) превращаются в функционалы соответствующих полей. В таком случае, общие правила взятия такого непрерывного предела заключаются в следующем:

$$L(q_i) \mapsto L[\phi(\boldsymbol{x})], \quad \sum_i \mapsto \int d\boldsymbol{x}, \quad \delta_{ij} \mapsto \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}), \quad \frac{\partial}{\partial q_i} \mapsto \frac{\delta}{\delta \phi(\boldsymbol{x})} \tag{10}$$

Лагранжев формализм

Раньше мы имели дело с функцией Лагранжа, теперь же функция Лагранжа сама превращается в функционал. Нас будут интересовать только локальные функции Лагранжа — то есть те, которые представимы в виде интеграла по пространству от *плотности лагранжиана*, который, в свою очередь, является уже обычной функцией полей (и, возможно, их производных)[2]:

$$S[\phi(\boldsymbol{x}, t)] = \int dt L[\phi(\boldsymbol{x}, t), \partial_\mu \phi(\boldsymbol{x}, t)], \quad L[\phi(\boldsymbol{x}, t), \partial_\mu \phi(\boldsymbol{x}, t)] = \int d\boldsymbol{x} \mathcal{L}(\phi(\boldsymbol{x}, t), \partial_\mu \phi(\boldsymbol{x}, t)) \tag{11}$$

(индекс μ пробегает как временную, так и пространственные координаты $\mu = \overline{t, x, y, z}$). Такое действие варьируется полностью аналогично N-частичной механике:

$$\frac{\delta S}{\delta \phi(\boldsymbol{x}, t)} = \frac{\delta L}{\delta \phi(\boldsymbol{x}, t)} - \partial_\mu \frac{\delta L}{\delta(\partial_\mu \phi(\boldsymbol{x}, t))} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} = 0 \tag{12}$$

(по повторяющимся индексам производится суммирование; кроме того, поскольку в дальнейшем мы будем иметь дело с релятивистскими теориями поля, подразумевается метрика Минковского $\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$).

Гамильтонов формализм

Следуя общей схеме, для построения гамильтонового описания поля необходимо ввести канонически сопряжённый импульс (который тоже представляет собой поле):

$$\pi(\boldsymbol{x}) = \frac{\delta L}{\delta(\partial_t \phi(\boldsymbol{x}))} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t \phi)}, \tag{13}$$

[1] Конечно, тут имеется проблема в построении квантовых аналогов выражений типа xp: из-за их некоммутации, соответствующий оператор $\hat{x}\hat{p}$, вообще говоря, будет неэрмитов, из-за чего требуется их дополнительно симметризовать. Но нам будет достаточно случаев, где этих проблем не возникает.

[2] Не все теории поля представимы в таком виде. В различных приложениях — например, в гидродинамике — порой приходится сталкиваться и с нелокальными теориями поля. Впрочем, с точки зрения релятивизма, такие теории нарушают лоренц-инвариантность и причинность, поэтому большого смысла они не имеют.

и после чего произвести преобразование Лежандра, переходя к функционалу Гамильтона[3]:

$$H[\phi(\boldsymbol{x}),\pi(\boldsymbol{x})]=\int d\boldsymbol{x}\pi(\boldsymbol{x})\partial_t\phi(\boldsymbol{x})-L[\phi(\boldsymbol{x}),\partial_\mu\phi(\boldsymbol{x})] \tag{14}$$

Функционал Гамильтона для локальных теорий поля тоже представляет собой интеграл по пространству от *плотности гамильтониана* (имеющей смысл плотности энергии), представляющей собой обычную функцию:

$$H[\phi(\boldsymbol{x},t),\pi(\boldsymbol{x},t)]=\int d\boldsymbol{x}\mathcal{H}(\phi(\boldsymbol{x}),\nabla\phi(\boldsymbol{x}),\pi(\boldsymbol{x})),\quad \mathcal{H}=\pi\partial_t\phi-\mathcal{L} \tag{15}$$

Наконец, уравнения движения — уравнения Гамильтона — записываются следующим образом:

$$\begin{cases}\frac{d\phi(\boldsymbol{x},t)}{dt} & =\frac{\delta H}{\delta\pi}=\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\pi}\\ \frac{d\pi(\boldsymbol{x},t)}{dt} & =-\frac{\delta H}{\delta\phi}=-\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\phi}+\nabla\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial(\nabla\phi)}\end{cases} \tag{16}$$

Скобки Пуассона Наконец, физические величины тоже вводятся как функционалы полей, а скобка Пуассона определяется для них следующим образом:

$$\{A[\phi(\boldsymbol{x}),\pi(\boldsymbol{x})],B[\phi(\boldsymbol{x}),\pi(\boldsymbol{x})]\}=\int d\boldsymbol{x}\left[\frac{\delta A}{\delta\phi(\boldsymbol{x})}\frac{\delta B}{\delta\pi(\boldsymbol{x})}-\frac{\delta A}{\delta\pi(\boldsymbol{x})}\frac{\delta B}{\delta\phi(\boldsymbol{x})}\right] \tag{17}$$

Она удовлетворяет всем тем же свойствам, что и скобка Пуассона для классической многочастичной системы; в частности, верны следующие соотношения:

$$\{\phi(\boldsymbol{x}),\phi(\boldsymbol{y})\}=0,\quad \{\pi(\boldsymbol{x}),\pi(\boldsymbol{y})\}=0,\quad \{\phi(\boldsymbol{x}),\pi(\boldsymbol{y})\}=\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \tag{18}$$

Каноническое квантование

Каноническое также производится аналогично случаю механики, поля $\phi(\boldsymbol{x})$и $\pi(\boldsymbol{x})$ становятся операторами: $\hat{\phi}(\boldsymbol{x})$ и $\hat{\pi}(\boldsymbol{x})$. Во избежание недоразумений, подчеркнём, что в отличие от квантовой механики, $\boldsymbol{x}$ не становится оператором. Как правило, никто не работает с квантовой теорией поля на языке волновых функций, но нужно понимать, что она представляла бы собой волновой функционал $\Phi\left[\phi(\boldsymbol{x})\right]$.

2.1 Пример: теория Клейна-Гордона

Давайте проведём всю эту процедуру для одной из наиболее простых релятивистских теорий поля — теории Клейна-Гордона. Эта теория описывает скалярное поле $\phi(\boldsymbol{x})$ со следующим действием:

$$S[\phi]=\frac{1}{2}\int d^4x\left[(\partial_\mu\phi)^2-m^2\phi^2\right]=\frac{1}{2}\int d^4x\left[(\partial_t\phi)^2-(\nabla\phi)^2-m^2\phi^2\right]. \tag{19}$$

(у теории имеется внешний параметр m — «масса»; скорость света c положена равной единице). Следуя приведённым выше рассуждениям, уравнения движения имеют вид:

$$\frac{\delta S}{\delta\phi}=-(\partial^2+m^2)\phi=0,\quad \partial^2=\partial_t^2-\nabla^2. \tag{20}$$

Канонически сопряжённый к ϕ импульс даётся выражением $\pi(\boldsymbol{x})=\frac{\delta L}{\delta(\partial_t\phi(\boldsymbol{x}))}=\partial_t\phi(\boldsymbol{x})$; поэтому гамильтониан имеет вид:

$$H[\phi,\pi]=\frac{1}{2}\int d^3\boldsymbol{x}\left[\pi^2+(\nabla\phi)^2+m^2\phi^2\right]. \tag{21}$$

и уравнения Гамильтона записываются следующим образом:

$$\begin{cases}\partial_t\phi & =\pi\\ \partial_t\pi & =-m^2\phi+\nabla^2\phi\end{cases} \tag{22}$$

[3]Стоит обратить внимание, что даже если исходная теория поля была релятивистски инвариантной, то гамильтоново её описание уже таковым не является, явно выделяя роль временной оси; что довольно очевидно, ведь функция Гамильтона — это энергия, и она не является релятивистски инвариантной величиной. Тем не менее, это ничему не противоречит

3 Законы сохранения и сохраняющиеся токи

В механике многих частиц законы сохранения энергии формулировались в виде постоянства во времени величин, определённых для всей системы (энергия, импульс, и т. д.). В теории поля законы сохранения обычно рассматривают в виде уравнений непрерывности для плотности некоторой величины $q(x,t)$ и плотности её потока $\boldsymbol{j}(x,t)$:

$$\partial_t q + \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{j} = 0. \tag{23}$$

Это уравнение описывает не только сохранение интегральной величины $Q(t) = \int d\boldsymbol{x}\, q(x,t)$ (которую иногда называют *зарядом* в обобщённом смысле), но и накладывают ограничения на динамику плотности заряда q. Так, в интегральной форме уравнение (23) записывается в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V q\, d\boldsymbol{x} = -\int_{\partial V}\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{dS}, \tag{24}$$

и связывает изменение интеграла от q по некоторой области V с полным потоком $\boldsymbol{j}$ через границу этой области ∂V. Для релятивистских теорий уравнение (23) можно записать в инвариантной форме:

$$\boxed{\partial_\mu j^\mu = 0,} \tag{25}$$

где был введён 4-вектор сохраняющегося тока $j^\mu = (q,\boldsymbol{j})$. Самым известным примером служит 4-вектор электрического тока. Ниже мы познакомимся и с другими примерами.

Глобальные симметрии теории и теорема Нётер

Так же как и в механике частиц, наличие сохраняющихся токов связано с наличием симметрий в рассматриваемой теории. Рассмотрим здесь случайных *глобальных* симметрий, которые параметризуются конечным числом параметров[4]. Пусть имеется некоторое инфинитезимальное преобразование полей[5] ϕ:

$$\phi \to \phi + \alpha\Delta\phi, \tag{26}$$

где α — малый параметр, а $\Delta\phi$ — некоторая функция полей и, возможно, их производных. Если это преобразование оставляет инвариантным лагранжиан, то такое преобразование является симметрией теории. Заметим однако, что если лагранжиан меняется на полную производную, то действие меняется на константу (равную нулю для периодических граничных условий), а уравнения движения остаются прежними. Такой случай тоже является симметрией системы. Поэтому будем считать, что лагранжиан меняется так:

$$\mathcal{L} \to \mathcal{L} + \alpha\partial_\mu J^\mu. \tag{27}$$

С другой стороны, можно выразить изменение лагранжиана через изменение полей:

$$\begin{aligned}\Delta\mathcal{L} &= \alpha\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\Delta\phi + \alpha\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\partial_\mu\Delta\phi = \\ &= \alpha\left[\left(\partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right)\Delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\partial_\mu\Delta\phi\right] = \\ &= \alpha\partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\Delta\phi\right],\end{aligned} \tag{28}$$

где во второй строчке мы воспользовались уравнениями движения для преобразования первого члена. Сравнивая результат с (27), получим

$$\partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\Delta\phi\right] = \partial_\mu J^\mu, \tag{29}$$

что означает сохранение тока

$$\boxed{j^\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\Delta\phi - J^\mu.} \tag{30}$$

Это утверждение носит название теоремы Нётер, так же, как и в механике частиц. Если полей несколько, то в выражении для j^μ должна стоять сумма по всем полям.

[4]Термин «глобальная симметрия» используется в противовес понятию *калибровочной* симметрии, то есть симметрии, параметризуемой произвольной функцией времени и координат $f(x^\mu)$. Наличие калибровочных симметрий имеет больше последствий и требует отдельного рассмотрения. С физической точки зрения наличие калибровочной симметрии означает некоторую избыточность полевых функций, описывающих физическую реальность, так например, разные конфигурации вектор-потенциала A^μ могут описывать одни и те же электрические и магнитные поля в электродинамике. При этом попытки сформулировать, скажем, квантовую теорию непосредственно на языке физических полей $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{B}$ не увенчались особым успехом.

[5]Предполагается, что если полей несколько, то все они включены в вектор ϕ.

Пример: комплексная теория Клейна-Гордона

Рассмотрим теорию с лагранжианом

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi. \tag{31}$$

Для начала получим уравнения движения для этой теории. Поля ϕ и ϕ^* связаны другом с другом, поэтому прямолинейное решение предполагает переход к полям $\mathrm{Re}\phi$ и $\mathrm{Im}\phi$. Однако стандартный и гораздо более удобный способ состоит в рассмотрении полей ϕ и ϕ^* как независимых. Тогда легко получить уравнения движения

$$\left(\partial^2 + m^2\right) \phi = 0, \tag{32}$$

$$\left(\partial^2 + m^2\right) \phi^* = 0. \tag{33}$$

Законность этой процедуры обосновывается тем, что, если начальные условия таковы, что ϕ и ϕ^* комплексно сопряжены, то уравнения движения (32-33) сохраняют этой свойство при временной динамике и «связь» (которая и заключается в том, что ϕ и ϕ^* сопряжены) не влияет на динамику.

Несложно также ввести канонически сопряжённые полям импульсы

$$\pi = \partial_t \phi^*, \quad \pi^* = \partial_t \phi \tag{34}$$

и найти гамильтониан

$$\mathcal{H} = \pi \partial_t \phi + \pi^* \partial_t \phi^* - \mathcal{L} = |\pi|^2 + |\nabla\phi|^2 + m^2 |\phi|^2. \tag{35}$$

Видно, что теория инварианта относительно преобразования

$$\phi \to \phi e^{i\theta} = \phi + i\theta\phi + \dots. \tag{36}$$

$$\phi^* \to \phi^* e^{-i\theta} = \phi^* - i\theta\phi^* + \dots. \tag{37}$$

Тогда в наших обозначениях $\Delta\phi = i\phi$, $J^\mu = 0$ и (опять-таки, рассматривая поля ϕ и ϕ^*, как независимые) найдём сохраняющийся ток

$$j^\mu = i\phi \partial^\mu \phi^* - i\phi^* \partial^\mu \phi. \tag{38}$$

Удобный рецепт нахождения тока

Как правило, для нахождения тока удобнее не применять теорему Нётер непосредственно, а использовать следующий приём. Сделаем вместо глобального калибровочное преобразование (которое, разумеется, не оставляет действие инвариантным). Для случая комплексного Клейна-Гордона оно выглядит так:

$$\phi \to \phi e^{i\theta(x^\mu)} = \phi + i\phi\theta(x^\mu) + \dots. \tag{39}$$

Тогда действие преобразуется так:

$$S \to S + \int d^4x \left(i\phi \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \theta - i\phi^* \partial_\mu \theta \partial^\mu \phi\right) = S - \int d^4x \cdot \theta \partial_\mu \left(i\phi \partial^\mu \phi^* - i\phi^* \partial^\mu \phi\right).$$

Выражение под знаком ∂_μ и есть сохраняющийся ток. Попробуйте доказать это строго самостоятельно.

Тензор энергии-импульса

Рассмотрим симметрию относительно трансляций на 4-вектор a^ν (в терминах предыдущих обозначений можно взять независимо $a = a^0$, $a = a^1$, и т. д., поэтому теперь j и J будут иметь по два индекса)

$$\phi\left(x^\nu\right) \to \phi\left(x^\nu + a^\nu\right) = \phi\left(x^\nu\right) + a^\nu \partial_\nu \phi + \dots. \tag{40}$$

Лагранжиан тоже подвергается трансляции: $\mathcal{L} \to \mathcal{L} + a^\mu \partial_\mu \mathcal{L} = \mathcal{L} + \partial_\mu \left(\eta^{\mu\nu}\mathcal{L}\right) a_\nu$, тогда $J^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu}\mathcal{L}$. Применяя теорему Нётер, получим сохранение тока (с лишним индексом), который обозначим теперь буквой T:

$$\boxed{T_{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu \phi\right)} \partial_\nu \phi - \eta_{\mu\nu}\mathcal{L}, \quad \partial_\mu T^{\mu\nu} = 0.} \tag{41}$$

Разумеется, $T_{\mu\nu}$ имеет интерпретацию тензора энергии-импульса. T^{00} — это плотность энергии, T^{0i} — плотность потока энергии, T^{i0} — плотность импульса, T^{ij} — тензор плотности потока импульса или, другими словами, тензор напряжений.

$(0,0)$-компонента уравнения (41) представляет собой преобразование Лежандра, превращающее лагранжиан в гамильтониан.

Другой способ ввести тензор энергии-импульса — это рассмотреть действие на фоне произвольной метрики $g_{\mu\nu}$ близкой к плоской. Такое действие получается введением меры интегрирования $\sqrt{-g}$, $g := \det g_{\mu\nu}$ и заменой во всех выражениях метрики Минковского на новую метрику:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g}\mathcal{L}\left(\eta_{\mu\nu} \to g_{\mu\nu}\right). \tag{42}$$

Например, теория Клейна-Гордона будет иметь действие

$$S = \frac{1}{2}\int d^4x \sqrt{-g}\left[g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - m^2\phi^2\right] \tag{43}$$

Метрический тензор энергии-импульса определяется, как

$$\boxed{\tilde{T}^{\mu\nu} = \frac{\partial\left(\sqrt{-g}\mathcal{L}\right)}{\partial g_{\mu\nu}}.} \tag{44}$$

Можно показать в общем виде, что он сохраняется. Вообще говоря, полученные два тензора различаются; видно, что первый, в отличии от второго, не всегда является симметричным[6]. Заметим, однако, что добавка к нему произвольного слагаемого $\partial_\lambda K^{\mu\lambda\nu}$, с антисимметричным по первым двум индексам тензором $K^{\mu\lambda\nu} = -K^{\lambda\mu\nu}$, оставляет свойство сохранения (41) выполненным. Это можно использовать для того, чтобы сделать $T_{\mu\nu}$ симметричным.

[6]Для общей теории относительности важна симметричность тензора энергии-импульса, который входит в уравнение Эйнштейна. Именно поэтому в ОТО именно второе выражение берётся за определение.