

Задачи к лекции “Классическая теория поля”

7 февраля 2018

Задача 1. Комфортная теория поля (30 баллов)

Рассмотрите теорию скалярного поля с действием

$$S = \int d^4x \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{\lambda}{4} \phi^4 \right). \quad (1)$$

Убедитесь, что теория инвариантна относительно *преобразований дилатации* $\phi(x^\mu) \rightarrow \alpha \phi(\alpha x^\mu)$. Найдите сохраняющийся ток. Убедитесь, что можно так подобрать тензор-энергии импульса, чтобы выполнялось соотношение $T^\mu_\mu = 0$.

Задача 2. Уравнение Шрёдингера (30 баллов)

Рассмотрите комплексное поле $\psi(\mathbf{x})$ со следующим действием¹:

$$S[\psi, \psi^*] = \int dt d^d \mathbf{x} \psi^*(\mathbf{x}) (i \partial_t - \hat{H}) \psi(\mathbf{x}), \quad (2)$$

где $\hat{H}$ — некий эрмитов дифференциальный оператор, действующий на координату (например, $\hat{H} = -\nabla^2/2m + U(\mathbf{x})$). Получите уравнения движения. Найдите канонически сопряжённые импульсы, гамильтониан, скобку Пуассона, запишите уравнения Гамильтона.

Задача 3. Электродинамика (40 баллов)

Рассмотрите действие электродинамики

$$S[A_\mu] = -\frac{1}{4} \int d^4x F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (3)$$

1. Получите уравнения движения. Запишите их в известной форме ($E^i = -F^{0i}$, $\epsilon^{ijk} B^k = -F^{ij}$).
2. Найдите *канонический* тензор энергии-импульса. Сделайте его симметричным с помощью преобразования (20) с семинара, выбрав $K^{\mu\nu\lambda} \propto F^{\mu\nu} A^\lambda$. Сравните со стандартными формулами для плотности энергии электромагнитного поля $\mathcal{E} = (E^2 + B^2)/2$ и вектором Пойнтинга $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{B}$.
3. Найдите *метрический* тензор энергии-импульса по формуле (23) из семинара. Совпадает ли он с каноническим?

¹Вообще говоря, подобная теория поля часто встречается в нелинейной гидродинамике в контексте «нелинейного уравнения Шрёдингера» и т.п.