Задачи к лекции «Графен»

28 февраля 2018

Упражнения (20 баллов)

Упражнение 1 (10 баллов) Выведите гамильтониан для электронов из долины K'.

Упражнение 2 (5 баллов) Выпишите волновые функции электронов с импульсом $\boldsymbol{p}$ из долины K (то есть полный квазиимпульс равен $\boldsymbol{K} + \boldsymbol{p}$).

Упражнение 3 (5 баллов) Реальные значения туннельного матричного элемента для графена равно $t \simeq 3.11$ эВ, а постоянная решётки равна $a \simeq 1.42$Å. Чему равна групповая скорость электронов? До каких температур низкоэнергетическое приближение оправдано?

Задачи (80 баллов)

Задача 1. Одномерная модель (30 баллов)

Рассмотрите одномерный прыжковый гамильтониан на цепочке длины L из N узлов, с периодическими граничными условиями:

$$\hat{H} = -t \sum_n (\hat{a}_n^\dagger \hat{a}_{n+1} + h.c) \tag{1}$$

1. Диагонализуйте гамильтониан, введя операторы рождения и уничтожения частиц с фиксированным квазиимпульсом, $\hat{a}_k$ и $\hat{a}_k^\dagger$. Найдите закон дисперсии квазичастиц.

2. Пусть эта система описывает бесспиновые фермионы, концентрация которых n. Покажите, что основное состояние соответствует заполнению состояний с $k \in (-k_F, k_F)$. Как «Ферми-импульс» k_F связан с n?

3. Низкоэнергетические возбуждения возникают вблизи Ферми-точек, и представляют собой частицы движущиеся влево (вблизи $-k_F$) и вправо (вблизи k_F). Введите поля $\hat{\psi}(x) = (\hat{\psi}_L(x), \hat{\psi}_R(x))$, и постройте низкоэнергетическую теорию поля.

Задача 2. Klein paradox (20 баллов)

Рассмотрите электрон, движущийся в графене в долине K с гамильтонианом $\hat{H} = v(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{p})$. На лист графена напылён потенциальный барьер, описываемый следующим потенциалом:

$$V(x,y) = \begin{cases} V_0, & x \in [-D/2, D/2] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}, \tag{2}$$

(плавный потенциал — считая $D \gg a$ — одинаково действует на подрешётки A и B). Пусть электрон с энергией $E > 0$ налетает по нормали на ступеньку. Найдите коэффициенты прохождения T и отражения R.

Задача 3. Поглощение света (30 баллов)

Рассмотрите лист графена, на который по нормали падает плоско-поляризованная электромагнитная волна частоты ω_0. Исследуйте поглощение электромагнитного излучение.

1. Электромагнитное поле — калибровочное, поэтому взаимодействие с электронами описывается стандартным образом, путём замены импульса $\hat{\boldsymbol{p}}$ на «ковариантную производную» $\hat{\boldsymbol{p}} - \frac{e}{c}\boldsymbol{A}$, и $\boldsymbol{A}$ — вектор-потенциал. Выпишите вектор-потенциал, описывающий такую задачу (в калибровке Вейля $\varphi = 0$).

2. Используя золотое правило Ферми, вычислите поглощение энергии листом графена $\frac{dE_{abs}}{dt}$. Используйте тот факт, что единственный способ выполнить закон сохранения энергии и импульса — это переброска электрона из заполненной валентной зоны (ветви спектра $E_{\boldsymbol{p}}^{(-)}$) в пустую зону проводимости (ветви спектра $E_{\boldsymbol{p}}^{(+)}$). Не забудьте учесть вырождения по спинам и долинам. Полученная величина должна быть пропорциональна площади листа A[1], которая возникнет из-за суммирования по начальным состояниям.

3. Вычислите вектор Пойтинга падающей волны $\mathcal{S}$, и полное количество энергии, падающей на лист $\frac{dE_{tot}}{dt} = S \cdot A$. Найдите коэффициент поглощения $\frac{dE_{abs}/dt}{dE_{tot}/dt}$.

[1] Конечно, более осмыслена ситуация, когда на графен светят лазером с конечной площадью пятна A. Однако, покуда пятно макроскопически большое, $A \gg a^2$, ничего не изменится.