

Диаграммная техника Фейнмана

4 апреля 2018

Теория возмущений

Постановка задачи

Мы с вами научились решать точно решать различные задачи, описываемые гауссовыми (квадратичными) теориями поля. Теперь давайте изучим вопрос о том, как исследовать взаимодействующие теории поля — теории поля, у которых в гамильтониане имеются вершины старших порядков. Сделаем это на примере теории «фи-в-четвёртой» — теории Клейна-Гордона с дополнительной поправкой:

$$S_{int} = -\frac{\lambda}{4!} \int d^4x \phi^4(x), \quad \hat{V}_{int} = \frac{\lambda}{4!} \int d^3\mathbf{x} \cdot \hat{\phi}^4(\mathbf{x}) \quad (1)$$

Величина, которую мы хотим вычислить — это Фейнмановская функция Грина, которая для взаимодействующей теории определяется аналогично как среднее, но уже не по вакууму $|0\rangle$ — а по настоящему основному состоянию взаимодействующей теории $|\Omega\rangle$:

$$D_F(x-y) \equiv \langle \Omega | T \{ \hat{\phi}(x) \hat{\phi}(y) \} | \Omega \rangle \quad (2)$$

которая в свободной теории имела вид $D_F(p) = \frac{i}{p^2 - m^2 + i0}$. Взаимодействие мы будем учитывать в рамках теории возмущений, что в конечном итоге приведёт нас к диаграммной технике Фейнмана.

Получение основного состояния

Первый нетривиальный вопрос — как получить основное состояние $|\Omega\rangle$? Для этого есть два основных трюка, которые мы обсудим ниже — адиабатическое включение взаимодействия, и мнимое время. Оба трюка, в действительности, практически эквивалентны.

Мнимое время Способ первый заключается в следующем. Давайте рассмотрим эволюцию волновой функции из состояния $|0\rangle$ за большое время, которое при этом имеет маленькую мнимую часть $T(1-i\epsilon)$. В таком случае, используя разложения по полному набору собственных состояний гамильтониана, мы получим:

$$e^{-i\hat{H}T(1-i\epsilon)} |0\rangle = \sum_n e^{-iE_n T} e^{-\epsilon E_n T} |n\rangle \langle 0|n\rangle \approx e^{-iE_\Omega T} e^{-\epsilon E_\Omega T} |\Omega\rangle \langle 0|\Omega\rangle \quad (3)$$

Таким образом, такая эволюция действует за счёт малой мнимой части эффективно как проектор на основное состояние — состояние с наименьшей энергией E_Ω . Конечно, тут сразу имеется несколько важных допущений. Во-первых, основное состояние должно быть невырождено¹. Во-вторых, оно должно перекрываться с вакуумом $\langle 0|\Omega\rangle^2$. В-третьих — в идеале, оно должно быть отделено от возбуждённых состояний энергетической щелью³. Ну и наконец, важен порядок взятия пределов — сперва $T \rightarrow +\infty$, а затем $\epsilon \rightarrow +0$. Получаем:

$$|\Omega\rangle = \frac{e^{-i\hat{H}T(1-i\epsilon)} |0\rangle}{e^{-iE_\Omega T(1-i\epsilon)} \langle 0|\Omega\rangle}, \quad \langle \Omega| = \frac{\langle 0| e^{-i\hat{H}T(1-i\epsilon)}}{e^{-iE_\Omega T(1-i\epsilon)} \langle 0|\Omega\rangle} \quad (4)$$

И для произвольной корреляционной функции имеем (мы запомним, что у T есть маленькая мнимая часть, и дальше будем её опускать, ровно как и взятие пределов)

¹Обычно это так, но это может нарушаться в системах со спонтанно нарушенной симметрией, где основное состояние имеет значительное вырождение

²Это условие может нарушаться в задачах, к которым и невозможно подступиться с позиции теории возмущений — задачам, в которых основное состояние значительно перестраивается. В качестве примера можно привести электроны в металле со слабым притяжением — как известно, это приводит к сверхпроводимости.

³В теории Клейна-Гордона это так — поскольку элементарные возбуждения массивны, и имеется щель $\Delta = m$; но это нарушается в квантовой электродинамике, где имеются фотоны со сколь угодно низкой энергией. Это требование не является строгим, и для КЭД теория возмущений работает, но порой она страдает от наличия инфракрасных расходимостей, связанных ровно с существованием таких фотонов.

$$\langle \Omega | \hat{O}_1(t_1) \hat{O}_2(t_2) \dots \hat{O}_N(t_N) | \Omega \rangle = \frac{\langle 0 | e^{-i\hat{H}T} \hat{O}_1(t_1) \dots \hat{O}_N(t_N) e^{-i\hat{H}T} | 0 \rangle}{e^{-2iE_\Omega T} |\langle \Omega | 0 \rangle|^2} \quad (5)$$

Наконец, знаменатель можно переписать из тривиального условия $\langle \Omega | 1 | \Omega \rangle = 1$:

$$e^{-2iE_\Omega T} |\langle \Omega | 0 \rangle|^2 = \langle 0 | e^{-2i\hat{H}T} | 0 \rangle \quad (6)$$

Расписывая явно Шрёдингеровскую зависимость операторов от времён, мы получаем следующую формулу:

$$\boxed{\langle \Omega | \hat{O}_1(t_1) \hat{O}_2(t_2) \dots \hat{O}_N(t_N) | \Omega \rangle = \frac{\langle 0 | \hat{U}(T, t_1) \hat{O}_1 \hat{U}(t_1, t_2) \dots \hat{U}(t_{N-1}, t_N) \hat{O}_N \hat{U}(t_N, -T) | 0 \rangle}{\langle 0 | \hat{U}(T, -T) | 0 \rangle}} \quad (7)$$

Она хороша тем, что *вакуумные* средние мы уже умеем считать — для них работает теорема Вика, и основываясь на этом выражении мы можем построить теорию возмущений.

Адиабатическое включение взаимодействия Теперь рассмотрим альтернативный трюк, который также позволяет получать основное состояние гамильтониана. Заключается он в следующем: давайте в момент времени $-T$ стартуем с невзаимодействующей системы, описываемой гамильтонианом \hat{H}_0 , а затем «включим» взаимодействие *адиабатически* — условно, введём руками зависимость в гамильтониан от времени вида $\hat{V}(t < 0) = e^{\gamma t} \hat{V}$, с достаточно малой γ . В результате адиабатической теоремы система будет следовать мгновенным состояниям гамильтониана и в результате она окажется в основном состоянии взаимодействующей теории. Заметим также, что этот метод страдает от тех же недугов, а именно — основное состояние должно быть невырождено, и было бы хорошо, чтобы в спектре была щель (в таком случае адиабатичность означает что γ должна быть меньше щели в спектре). В таком случае мы получим попросту следующее:

$$|\Omega\rangle = \hat{U}(0, -T) |0\rangle \quad (8)$$

Это приводит нас к следующей формуле:

$$\langle \Omega | \hat{O}_1(t_1) \hat{O}_2(t_2) \dots \hat{O}_N(t_N) | \Omega \rangle = \langle 0 | \hat{U}(-T, t_1) \hat{O}_1(t_1) \hat{O}_2(t_2) \dots \hat{O}_N(t_N) \hat{U}(0, -T) | 0 \rangle \quad (9)$$

(эволюция тем самым тут происходит по замкнутому временному контуру — читая справа налево, мы получаем $-T \rightarrow t_N \rightarrow \dots \rightarrow t_1 \rightarrow -T$)⁴. Для того, чтобы продвинуться далее, мы перепишем первый оператор эволюции в виде $\hat{U}(-T, t_1) = \hat{U}(-T, T) \hat{U}(T, t_1)$. Если в момент времени $T \rightarrow +\infty$ взаимодействие также адиабатически выключить, то полная эволюция $\hat{U}(T, -T) |0\rangle$ приведёт нас обратно в вакуум, с точностью до какой-то фазы (которая, как мы помним из адиабатики, состоит из *динамического вклада* — $\int E(t) dt \approx E_\Omega \cdot 2T$ — и фазы Берри):

$$\hat{U}(T, -T) |0\rangle \simeq e^{i\Phi} |0\rangle \quad (10)$$

Это позволяет нам записать цепочку равенств:

$$\begin{aligned} \langle \Omega | \hat{O}_1(t_1) \hat{O}_2(t_2) \dots \hat{O}_N(t_N) | \Omega \rangle &= \langle 0 | \hat{U}(-T, T) \hat{U}(T, t_1) \hat{O}_1(t_1) \hat{O}_2(t_2) \dots \hat{O}_N(t_N) \hat{U}(0, -T) | 0 \rangle = \\ &= e^{-i\Phi} \langle 0 | \hat{U}(T, t_1) \hat{O}_1(t_1) \hat{O}_2(t_2) \dots \hat{O}_N(t_N) \hat{U}(0, -T) | 0 \rangle = \frac{\langle 0 | \hat{U}(T, t_1) \hat{O}_1 \hat{U}(t_1, t_2) \dots \hat{U}(t_{N-1}, t_N) \hat{O}_N \hat{U}(t_N, -T) | 0 \rangle}{\langle 0 | \hat{U}(T, -T) | 0 \rangle} \end{aligned} \quad (11)$$

что в конечном итоге снова приводит нас к тому же выражению, что и предыдущий трюк.

Представление взаимодействия

Собственно, дальнейшее построение прямолинейно. От представления Шрёдингера мы перейдём к представлению взаимодействия, где эволюция операторов происходит с помощью оператора $\hat{U}_0(t_2, t_1) = e^{-i\hat{H}_0(t_2-t_1)}$ (с невозмущённым гамильтонианом \hat{H}_0), а эволюция волновых функций — с оператором эволюции в представлении взаимодействия $\hat{S}(t_2, t_1) = \hat{U}_0(t_1, t_2) \hat{U}(t_2, t_1)$. Что важно, что при этом эволюция всех операторов будет точно такой же, как мы считали ранее — в этом смысле ничего не изменилось; для оператора эволюции в представлении взаимодействия работает следующая формула:

$$\hat{S}(t_2, t_1) = \hat{T} \left\{ \exp \left(-i \int_{t_1}^{t_2} \hat{V}(\tau) d\tau \right) \right\} \quad (12)$$

⁴Это выражение обладает большей универсальностью, чем описанное в предыдущем параграфе. В частности, оно не использует независимость гамильтониана от времени — более того, такая временная зависимость важна для вывода этого выражения — и позволяет изучать неравновесные ситуации. На основе этого выражения строится диаграммная техника Келдыша.

(и при этом оператор возмущения сам берётся в представлении взаимодействия, так что даже если он исходно от времени не зависел — то теперь будет). Наконец, для произвольной корреляционной функции мы тоже можем перейти к представлению взаимодействия и записать:

$$\langle \Omega | \hat{O}_1(t_1) \hat{O}_2(t_2) \dots \hat{O}_N(t_N) | \Omega \rangle = \frac{\langle 0 | \hat{S}(T, t_1) \hat{O}_1(t_1) \hat{S}(t_1, t_2) \dots \hat{S}(t_{N-1}, t_N) \hat{O}_N(t_N) \hat{S}(t_N, -T) | 0 \rangle}{\langle 0 | \hat{S}(T, -T) | 0 \rangle} \quad (13)$$

Если же операторы при этом сами \mathcal{T} -упорядочены, так что $t_1 > t_2 > \dots > t_N$, то мы можем вставить общий знак \mathcal{T} -упорядочения в правой части; поскольку под \mathcal{T} -упорядочением операторы можно переставлять, то для таких корреляторов мы приходим к следующей формуле:

$$\langle \Omega | \hat{\mathcal{T}} \{ \hat{O}_1(t_1) \hat{O}_2(t_2) \dots \hat{O}_N(t_N) \} | \Omega \rangle = \frac{\langle 0 | \hat{\mathcal{T}} \{ \hat{O}_1(t_1) \dots \hat{O}_N(t_N) \hat{S} \} | 0 \rangle}{\langle 0 | \hat{S} | 0 \rangle}, \quad \hat{S} \equiv \hat{S}(T, -T) \quad (14)$$

Раскладывая выражение для оператора эволюции в представлении взаимодействия \hat{S} в ряд, мы будем строить теорию возмущений.

Фейнмановские диаграммы для пропагатора теории ϕ^4

Диаграммная техника естественным образом возникает при разложении \hat{S} -матрицы в ряд по степеням возмущения и дальнейшем применении теоремы Вика. Здесь и далее символ \mathcal{T} -упорядочения будет подразумеваться, но опускаться. Подробное обсуждения вывода правил Фейнмана для теории ϕ^4 можно найти в книжке Пёскина, Шрёдера, глава 4.4 (диаграммы Фейнмана), и переизлагать содержимое этой главы тут бессмысленно. Изложим лишь главные основные результаты для Фейнмановской функции Грина (впрочем, они тривиально обобщаются и на старшие корреляторы).

Правила Фейнмана в координатном представлении Каждая диаграмма ставится в соответствие некоторому набору Виковских свёрток, и диаграмме ставится в соответствие некоторое аналитическое выражение, представляющее собой вклад в ряд теории возмущений, скажем, для пропагатора:

1. В n -том порядке теории возмущений картинка должна содержать ровно n *вершин взаимодействия* — точек пространства z_1, \dots, z_N , из которых торчит по 4 «хвоста» (они берутся из вида оператора взаимодействия $\hat{V} = \frac{\lambda}{4!} \int \phi^4(x) d^3x$. Каждой такой вершине нужно поставить в соответствие интеграл $(-i\lambda) \cdot \int d^4z_i$.
2. Помимо этого, имеются две дополнительные точки — *внешние концы* x и y . По ним интегрирование не производится.
3. На картинке необходимо провести *спаривание* каким-то способом — соединить свободные концы. По всем возможным *топологически неэквивалентным спариваниям* нужно просуммировать.
4. Соединению точек z_i и z_j (включая внешние концы) ставится в соответствие Фейнмановский пропагатор — $D_F^{(0)}(z_i - z_j)$.
5. Полученное выражение необходимо поделить на *симметричный фактор диаграммы*.

Сокращение вакуумных пузырей Оказывается, что учитывать нужно только *связные* диаграммы — диаграммы, все вершины которых связаны (возможно, посредством нескольких связей) с одним из внешних концов. Имеет место следующее тождество, которое носит название *экспоненцированием вакуумных пузырей*:

$$\langle 0 | \phi(x) \phi(y) \hat{S} | 0 \rangle = \sum (\text{все диаграммы}) = \sum (\text{все связные диаграммы}) \times \exp \left(\sum (\text{вакуумные пузыри}) \right) \quad (15)$$

При этом знаменатель устроен так же, но нет вклада в связные диаграммы, то для знаменателя имеем:

$$\langle 0 | \hat{S} | 0 \rangle = \exp \left(\sum (\text{вакуумные пузыри}) \right) \quad (16)$$

В частности, поскольку, как мы выяснили ранее, $\langle 0 | \hat{S} | 0 \rangle = | \langle 0 | \Omega \rangle |^2 \exp(-iE_\Omega 2T)$, то сумма вакуумных пузырей (а каждый вакуумный пузырь пропорционален четырёхмерному объёму системы $V_4 = V \cdot 2T!$) даёт попросту энергию основного состояния (отсчитанную от энергии невозмущённой системы, поскольку мы работаем в представлении взаимодействия):

$$\epsilon_\Omega = \frac{E_\Omega}{V_3} = -\frac{1}{V_4} \text{Im} \sum (\text{вакуумные пузыри}) \quad (17)$$

Так или иначе, вакуумные пузыри сокращаются, и для пропагатора необходимо учитывать только связные диаграммы:

$$D_F(x - y) = \langle \Omega | \phi(x) \phi(y) | \Omega \rangle = \sum (\text{все связные диаграммы}) \quad (18)$$

Уравнение Дайсона На диаграммном языке можно продвинуться ещё чуть дальше, добавив дополнительную классификацию диаграмм. Назовём диаграмму *одночастично неприводимой*, если она не распадается при разрезании какой-либо одной линии на несвязные куски. Назовём *собственной энергетической частью* $\Sigma(x-y)$ следующий ряд (включим « $-i$ » в определение, смысл которой будет ясен ниже):

$$-i\Sigma(x-y) = \sum (\text{одночастично неприводимые диаграммы с ампутированными концами}) \quad (19)$$

(под «ампутированными концами» имеется в виду, что к ним нужно дорисовать какие-то функции Грина, которые исключаются из самого выражения для Σ). В таком случае, диаграммный ряд для пропагатора представляется в следующем операторном виде (то есть везде подразумеваются свёртки):

$$\boxed{\hat{D}_F = \hat{D}_F^{(0)} + \hat{D}_F^{(0)}(-i\hat{\Sigma})\hat{D}_F^{(0)} + \hat{D}_F^{(0)}(-i\hat{\Sigma})\hat{D}_F^{(0)}(-i\hat{\Sigma})\hat{D}_F^{(0)} + \dots \equiv \hat{D}_F^{(0)} + \hat{D}_F^{(0)}(-i\hat{\Sigma})\hat{D}_F} \quad (20)$$

или, в координатной форме:

$$D_F(x-y) = D_F^{(0)}(x-y) + \int d^4z_1 d^4z_2 D_F^{(0)}(x-z_1)(-i\Sigma(z_1-z_2))D_F(z_2-y) \quad (21)$$

Это интегральное уравнение, из которого определяется $D_F(x-y)$, носит название *уравнения Дайсона*. В действительности необходимо строить теорию возмущений именно для собственной энергетической части Σ .

Преобразование Фурье и правила Фейнмана в импульсном представлении Правила Фейнмана прекрасно переписываются, используя преобразование Фурье — вместо пропагаторов необходимо подставить их преобразования Фурье, и провести некоторые вычисления. Сводится всё к следующему набору правил:

1. На диаграмме Фейнмана каждой линии нужно поставить в соответствие четыре-импульс p_i (и направление, вдоль которого этот импульс «бежит»). В вершинах необходимо учесть закон сохранения четыре-импульса (сумма импульсов с учётом направлений равна нулю) — из-за чего не все импульсы оказываются *независимы*. Помимо этого, имеются внешние концы, через которые в диаграмму «входит» и «выходит» внешний импульс p .
2. Каждой вершине нужно поставить в соответствие $-i\lambda$.
3. Каждому пропагатору, по которому «бежит» импульс p_i ставится в соответствие $D_F^{(0)}(p_i) = \frac{i}{p_i^2 - m^2 + i0}$.
4. По всем незакреплённым законами сохранения импульсам происходит интегрирование $\int \frac{d^4p_i}{(2\pi)^4}$.
5. И опять диаграмму необходимо разделить на её симметричный фактор.

Используя преобразование Фурье, уравнение Дайсона тривиально решается:

$$D_F(p) = D_F^{(0)}(p) + D_F^{(0)}(p)(-i\Sigma(p))D_F(p) \Rightarrow D_F(p) = \frac{i}{i(D_F^{(0)}(p))^{-1} - \Sigma(p)} = \frac{i}{p^2 - m^2 - \Sigma(p)} \quad (22)$$

Из такого представления видно, что собственная энергетическая часть отвечает за различные перенормировки спектра одночастичных возбуждений — например, $\Sigma(p=0)$ представляет собой перенормировку массы.

Заключение

В заключение хочется отметить, что большинство сделанных тут утверждений носит совершенно общий характер. В частности, экспоненцирование и сокращение вакуумных пузырей носит такой же вид в произвольной теории поля; ровно как и сами правила Фейнмана, классификация диаграмм по одночастичной приводимости и уравнение Дайсона. Единственное, что меняется от одной теории поля к другой — это вид *вершин взаимодействия* и *пропагаторов*. В частности, для электрон-фононного взаимодействия необходимо было бы вводить линии двух типов — электронные линии (у которых, к слову, концы неэквивалентны, поскольку пропагатор имеет вид $G(x-y) = \langle \hat{\psi}(x)\hat{\psi}^\dagger(y) \rangle$ — из-за чего на них необходимо рисовать стрелки⁵) и фононные линии, а вершины взаимодействия содержат два «электронных» хвоста (соответствующих $\psi^\dagger(x)\psi(x)$) и один фононный (соответствующий $\text{div}\mathbf{u}(\mathbf{r})$).

⁵Разные авторы рисуют стрелки по-разному. Например, в книге Абрикосова, Горькова и Дзялошинского, а также у Левитова и Шитова, стрелка в пропагаторе $\langle \hat{\psi}(x)\hat{\psi}^\dagger(y) \rangle$ направлена от точки x (где стоит оператор уничтожения) к точке y (где стоит оператор рождения). У Ландау и Лифшица в «физической кинетике» — наоборот, стрелки рисуют от точки y к точке x — что, возможно, идеологически более правильно, поскольку частица рождается в точке y , оттуда «летит» к точке x и там уничтожается.