Задачи к лекции «Диаграммная техника Фейнмана»

4 апреля 2018

Упражнения (35 баллов)

В этих упражнениях рассматривается вещественная теория Клейна-Гордона с возмущением вида ϕ^4.

Упражнение 1. Теорема Вика и симметрийные факторы (10 баллов)

Рассмотрите Фейнмановский пропагатор:

$$D(x-y) = \langle\Omega|\,\hat{\mathcal{T}}\{\phi(x)\phi(y)\}\,|\Omega\rangle = \frac{\left\langle \phi(x)\phi(y)\hat{S}\right\rangle}{\left\langle \hat{S}\right\rangle}, \quad \hat{S} = \mathcal{T}\left\{\exp\left(-i\frac{\lambda}{4!}\int d^4z\phi^4(z)\right)\right\} \tag{1}$$

1. Разложите экспоненту вплоть до четвёртого порядка теории возмущений. Нарисуйте все диаграммы для первого и второго порядков теории возмущений.

2. Вычислите полное количество свёрток, которые соответствуют каждой из диаграмм. Напишите аналитическое выражение для каждой диаграмм, с учётом их найденного симметрийного фактора, через невозмущённые пропагаторы Фейнмана $D_0(x-y)$.

3. Повторите те же пункты для знаменателя.

Указание. Числитель В N-том порядке ТВ имеется $4N+2$ полевых операторов и соответственно $(4N+1)!!$ способов спаривания (для $N=1,2,3$ это даёт соответственно 15, 945 и 135135 спариваний).

- В первом порядке должно получиться 2 диаграммы ($3+12=15$ спариваний)
- Во втором порядке — 7 диаграмм ($9+24+72+72+192+288+288=945$ спариваний)

Указание. Знаменатель В N-том порядке ТВ имеется $4N$ полевых операторов и соответственно $(4N-1)!!$ способов спаривания. В первых трёх порядках это соответственно 3, 105 и 10395 спариваний.

- В первом порядке должна получиться 1 диаграмма (3 спаривания)
- Во втором порядке должны получиться 3 диаграммы ($9+24+72=105$ спариваний)

Упражнение 2. Экспоненциирование связных диаграмм (10 баллов)

Рассмотрите знаменатель — среднее значение от $\hat{S}$-матрицы.

1. В прошлом выражении вы исследовали знаменатель вплоть до второго порядка теории возмущений. Покажите, что каждая диаграмма с b вакуумными пузырями пропорциональна V_4^b, где $V_4 = V\cdot T$ — четырёхмерный объём системы (V — обычный, трёхмерный объем, а T — время наблюдения за ней).

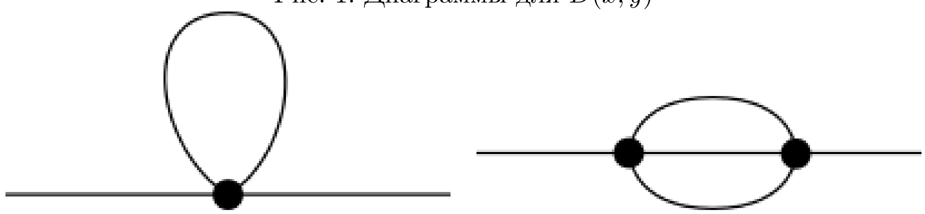
2. Разложите теперь $\ln\left\langle\hat{S}\right\rangle_0$ вплоть до второго порядка теории возмущений. Вычислите всевозможные свёртки и покажите непосредственным вычислением, что диаграммы с более чем одним вакуумным пузырём полностью сокращаются, а полученный ответ пропорционален V_4.

Упражнение 3. Собственная энергетическая часть (15 баллов)

В этом упражнении мы научимся явное выражение для собственной энергетической части $\Sigma(p)$, с учётом всех необходимых множителей и симметрийных факторов.

1. В первом упражнении вы выписывали аналитические формулы для первых двух порядков теории возмущений для Фейнмановского пропагатора (когда работали с числителем); кроме того, мы знаем, что диаграммы с вакуумными пузырями необходимо отбросить. Выпишите в координатном представлении аналитические формулы для двух диаграмм, которые изображены на рисунке.

Рис. 1: Диаграммы для $D(x,y)$



2. Представьте аналитические выражения в виде следующей свёртки:

$$D_2(x,y) = \int d^4z_1 d^4z_2 D_0(x-z_1)(-i)\Sigma^{(2)}(z_1,z_2)D_0(z_2-y) \tag{2}$$

   Выпишите аналитическое выражение для $\Sigma^{(2)}(z_1,z_2)$. Покажите, что первая диаграмма, в частности, пропорциональна $\delta(z_1-z_2)$, а также что вся собственная энергетическая часть зависит только от разности z_1-z_2.

3. Выпишите выражения для преобразования Фурье $\Sigma(p)$ через Фурье-образы невозмущённой функции Грина $D_0(p)$.

4. Вычислите вклад от первой диаграммы, используя размерную регуляризацию. Он даёт (ультрафиолетово расходящуюся) перенормировку массы частиц из-за взаимодействия.

Задачи (65 баллов)

Задача 1. Квантовый ангармонический осциллятор (40 баллов)

Квантовая механика может рассматриваться как частный случай квантовой теории поля в $0+1$ измерениях. В данной задаче мы применим методы квантовой теории поля для ангармонического осциллятора — аналога теории «фи-в-четвёртой» в $0+1$ измерениях. Рассмотрите квантовый гармонический осциллятор (см. задачу 1 предыдущего семинара) с возмущением $V_{int} = \frac{\mu}{3!}\phi^3 + \frac{\lambda}{4!}\phi^4$.

1. Выведите правила диаграммной техники для исследуемой теории.

2. Вычислите вакуумные пузыри, покажите, что они пропорциональны времени наблюдения за системой T и найдите поправки к энергии основного состояния $\Delta E_{n=0}$ в первом неисчезающем порядке по μ и λ — $O(\mu^2, \lambda)$.

3. Найдите собственную энергетическую часть $\Sigma(\omega)$ в том-же порядке теории возмущений.

4. Используя уравнение Дайсона, исследуйте, как сместится полюс функции Грина осциллятора $\langle\Omega|\,\hat{\mathcal{T}}\{\hat\phi(t)\hat\phi(t')\}\,|\Omega\rangle$. Функция Грина описывает *одночастичные возбуждения* системы, и поэтому полученное выражение в действительности определяет просто поправку к первому возбуждённому уровню осциллятора $\Delta E_{n=1}$.

5. Сравните все полученные ответы с известными из «обычной» теории возмущений.

Указание все вычисления удобно производить во временном, а не частотном, представлении.

Задача 2. «Обычная» теория возмущений (25 баллов)

Рассмотрите одночастичную квантомеханическую задачу с каким-то гамильтонианом $\hat H = \hat H^{(0)} + \hat V$. Как обычно, полный набор собственных состояний невозмущенного гамильтониана $\hat H_0$ известен: $\hat H_0\,|n\rangle = E_n^{(0)}\,|n\rangle$; будем считать все собственные значения невырожденными. Резольвента, или функция Грина, для оператора $\hat H$ определяется стандартным образом как $\hat G(E) = (E - \hat H + i0)^{-1}$; невозмущенную функцию Грина мы будем называть $\hat G^{(0)}(E) = (E - \hat H_0 + i0)^{-1}$.

1. Постройте операторный ряд теории возмущений по $\hat{V}$ для величины $\hat{G}$. Соответствующее диаграммное представление членов этого ряда имеет следующий вид:

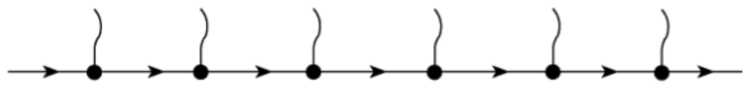


Рис. 2: Диаграммное представление произвольного элемента ряда теории возмущений для $\hat{G}$. Волнистой линии соответствуют операторы $\hat{V}$, а прямой — операторы $\hat{G}_0$.

2. В представлении собственных функций гамильтониана $\hat{H}_0$, невозмущённая функция Грина имеет диагональный вид:

$$\langle n| \hat{G}^{(0)} |m\rangle = G_n^{(0)}\delta_{nm}, \quad G_n^{(0)} = \frac{1}{E - E_n^{(0)} + i0} \tag{3}$$

Запишите ряд теории возмущений для величины $G_n \equiv \langle n| \hat{G} |n\rangle$, выразив его через различные $G_n^{(0)}$, а также матричые элементы V_{nm}. Покажите, что на графическом языке это соответствует следующим «правилам Фейнмана» — каждой линии мы ставим в соответствие число n_i, по которому происходит суммирование; сама линия соответствует $G_{n_i}^{(0)}$; а волнистая линия соответствует $V_{n_i n_j}$, где n_i соответствует левой линии, а n_j — правой.

3. Чтобы вывести «уравнение Дайсона», необходимо привести диаграммный ряд к «одночастично-неприводимому» ряду:

$$G_n = G_n^{(0)} + G_n^{(0)}\Sigma_n G_n^{(0)} + G_n^{(0)}\Sigma_n G_n^{(0)}\Sigma_n G_n^{(0)} + \ldots, \quad G_n = \frac{1}{G_n^{(0)-1} - \Sigma_n} = \frac{1}{E - E_n^{(0)} - \Sigma_n(E) + i0} \tag{4}$$

Для этого при суммировании во всех промежуточных состояниях нужно явно выделить член с $n_i = n$ (обозначим его на диаграммном языке линией с чёрточкой) и остальные, с $n_i \neq n$ (которые мы будем обозначать просто прямой линией). В таком случае, на графическом языке необходимо суммировать по всем диаграммам, которые имеют вид, изображённый на рисунке — но при этом каждая линия может быть как с чёрточкой, так и нет. В таком случае в «собственную энергию» Σ_n должны попросту войти все диаграммы «без чёрточек», что соответствует следующему графическому представлению:

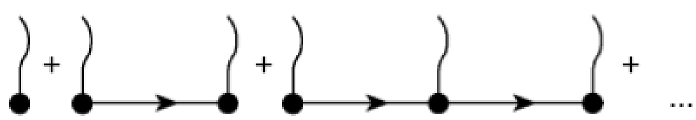


Рис. 3: Диаграммный ряд для Σ_n. Линии соответствуют $\sum_{n_i \neq n} G_{n_i}^{(0)}$, а волнистые линии соответствуют $V_{n_i n_j}$

4. Напишите явно выражение для Σ_n вплоть до второго порядка теории возмущений, и выпишите соответствующее выражение для пропагатора G_n.

5. По построению, полюса функции Грина $\hat{G}$ соответствуют собственным числам полного гамильтониана $\hat{H}$ — а значит, точные уровни энергии E_n определяются из уравнения

$$G_n^{-1}(E_n) = 0 \Rightarrow E_n = E_n^{(0)} + \Sigma_n(E_n) \tag{5}$$

Это трансцендентное уравнение уже можно достаточно просто решить с учётом малости матричных элементов V с нужной точностью (которая должна соответствовать той же точностью, с которой вы вычислили $\Sigma_n(E)$. Решите его и покажите, что его решение воспроизводит известные формулы для первых двух поправок по теории возмущений к собственным значениям.