Интеграл по траекториям в квантовой теории поля

11 апреля 2018

Вычисление средних по основному состоянию

Вступление

Для простоты мы рассмотрим сейчас гамильтониан общего вида для одной частицы, движущейся в каком-то потенциале (например, описываемую гамильтонианом $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + U(\hat{x})$). В квантовой теории поля ключевым объектом является $\mathcal{T}$-упорядоченные корреляционные функции, вычисленные по основному состоянию теории — величина осмысленная и для рассматриваемой нами частицы. С другой стороны, в квантовой механике мы выводили представление через функциональный интеграл для немного другой величины — запаздывающего пропагатора, или амплитуды перехода:

$$G_R(x_1, x_2, t_1, t_2) \equiv \langle x_1| \hat{U}(t_1, t_2) |x_2\rangle \equiv \int_{x(t_2)=x_2}^{x(t_1)=x_1} \mathcal{D}[x(t)] \exp\left(iS[x(t)]\right), \quad t_1 > t_2 \tag{1}$$

На этом семинаре мы свяжем одно с другим и научимся считать корреляционные функции в квантовой теории поля с помощью функционального интеграла.

Построение

Итак, мы хотим научиться считать $\mathcal{T}$-упорядоченные корреляционные функции следующего вида:

$$G(t_1 > \dots > t_N) = \langle\Omega| \hat{x}(t_1) \dots \hat{x}(t_N) |\Omega\rangle \tag{2}$$

В качестве отправной точки для построения основного состояния воспользуемся ровно тем-же трюком, которым мы пользовались на прошлом семинаре при выводе диаграммной техники Фейнмана — но с небольшим изменением. Мы стартуем не с вакуума (да и что такое вакуум для квантомеханической частицы?), а с произвольного состояния в координатном представлении $|x\rangle$, и подействуем на него эволюцией за большое время с малой мнимой добавкой $T(1 - i\epsilon)$:

$$|\Omega\rangle = \frac{e^{-i\hat{H}T(1-i\epsilon)} |x_b\rangle}{e^{-iE_\Omega T(1-i\epsilon)} \langle x_b|\Omega\rangle}, \quad \langle\Omega| = \frac{\langle x_a| e^{-i\hat{H}T(1-i\epsilon)}}{e^{-iE_\Omega T(1-i\epsilon)} \langle\Omega|x_a\rangle} \tag{3}$$

Кроме этого, опять-таки распишем явно операторы в представлении взаимодействия, а также перепишем знаменатель из условия $\langle\Omega| 1 |\Omega\rangle = 1$. Мы получим представление, которое минимально отличается от использованного на предыдущей лекции:

$$G(t_1, \dots, t_N) = \frac{\langle x_a| \hat{U}(T, t_1)\hat{x}\hat{U}(t_1, t_2) \dots \hat{U}(t_{N-1}, t_N)\hat{x}\hat{U}(t_N, -T) |x_b\rangle}{\langle x_a| \hat{U}(T, -T) |x_b\rangle} \tag{4}$$

Знаменатель уже представляет собой амплитуду перехода. В числителе же давайте вставим рядом с каждым оператором координаты разложение единицы по координатному базису: $\mathbb{I} = \int dx_i |x_i\rangle \langle x_i|$. Наконец, для каждой амплитуды перехода воспользуемся представлением через функциональный интеграл:

$$\langle x_a| \hat{U}(T, t_1)\hat{x}\hat{U}(t_1, t_2) \dots \hat{U}(t_{N-1}, t_N)\hat{x}\hat{U}(t_N, -T) |x_b\rangle = \int \prod_{n=1}^{N} dx_n \cdot x_1 \dots x_n \cdot \prod_{n=0}^{N} \int_{x_n(t_{n+1})=x_{n+1}}^{x_n(t_n)=x_n} \mathcal{D}[x_n(t)] e^{iS_n[x_n(t)]} \tag{5}$$

(с дополнительными условиями $t_0 = T$, $x_0 = x_a$, $t_{N+1} = -T$, $x_{N+1} = x_b$). Мы получаем интегрирование по промежуточным функциям $x_n(t_n > t > t_{n+1})$ с закреплёнными концами, вдобавок к интегрированию по этим самым закреплённым концам. Вполне естественно объединить все эти промежуточные функции в одну функцию, определённую на всём отрезке $T > t > -T$:

$$x(t) = \begin{cases} x_0(t), & T > t > t_1 \\ \vdots & \\ x_n(t), & t_N > t > -T \end{cases} \tag{6}$$

Во-первых, в таком случае интегрирование по промежуточным точкам и интегрирование по всем промежуточным функциям очевидным образом соберётся в простое интегрирование по всем функциям вообще (с закреплёнными концами, разумеется). Во-вторых, сумма действий на каждом отрезке времени превратится в полное действие на всей траектории $x(t)$. Наконец, величины x_k в точности равны значению траектории в момент времени $x(t_k)$. С учётом всего вышесказанного, мы получаем следующее выражение через функциональный интеграл для Фейнмановского пропагатора (а мы существенно использовали то, что времена упорядочены!):

$$\boxed{\langle\Omega|\,\hat{\mathcal{T}}\{\hat{x}(t_1)\dots\hat{x}(t_N)\}\,|\Omega\rangle = \frac{\int\mathcal{D}[x(t)]\cdot x(t_1)\dots x(t_N)\cdot\exp(iS[x(t)])}{\int\mathcal{D}[x(t)]\cdot\exp(iS[x(t)])}} \tag{7}$$

Это — ключевое выражение в нашем выводе. Тут важно сделать несколько замечаний.

- Во-первых, в левой части равенства стоят квантомеханические операторы, а в правой — *обычные числа.* Для них не нужно беспокоиться о коммутативности, и прочих тонкостях. Мелочь, а приятно! Всё оказывается самосогласованным, в том смысле что операторы под знаком $\mathcal{T}$-упорядочения тоже можно менять местами как угодно.

- Во-вторых, изначально имели место закреплённые граничные условия $x(-T) = x_b$ и $x(T) = x_a$. С другой стороны, мы получили, что ответ от их выбора, в действительности, не зависит — их можно выбирать совершенно произвольными. Более того, чаще всего гораздо удобней оказываются любые другие граничные условия — например, периодические $x(-T) = x(T)$. Важно то, что в пределе $T\to\infty$ выбор граничных условий, как правило, на ответ не влияет никак.

- В-третьих, как обычно когда мы имеем дело с функциональными интегралами, в букву $\mathcal{D}[x(t)]$ включён некий бесконечный нормировочный множитель, зависящий от используемой нами дискретизации и регуляризации функционального интеграла. Однако, будучи записанном в таком виде — а именно, в виде отношения двух функциональных интегралов — выбор этих констант может быть абсолютно произвольным, лишь бы они были одинаковы для числителя и знаменателя — они всё равно сократятся. Об этих нормировках мы можем спокойно забыть (чего нельзя было делать, скажем, в исходном выражении для запаздывающего пропагатора — в этом смысле оно плохо определено).

- Наконец, у этого выражения имеется наглядный физический смысл. Он очень уж похож на обыкновенное (правда, функциональное, но это немногое меняет) статистическое усреднение по ансамблю, вероятность какой-то реализации этого ансамбля даётся формулой $P[x(t)] = e^{iS[x(t)]}$, а знаменатель — это просто статсумма (нормировочный множитель) этого распределения. Конечно, в теории вероятностей очень важно, что сама вероятность является положительно определённой вещественной величиной — чего не скажешь про нашу «вероятность» — в этом смысле мы имеем дело скорее с амплитудами, чем с вероятностями.

Последнюю аналогию можно развить — по аналогии с статистическими флуктуациями, можно говорить о *квантовых флуктуациях.* Частица движется по всем возможным траекториям, на которые траектории нет никаких ограничений — они не обязательно удовлетворяют уравнениям движения; допустимы траектории, на которых не сохраняется энергия; более того, в принципе допустимы и "подбарьерные" траектории, в которой частица залетает в классически запрещённую область.

Однако стоит заметить, что все "странные" траектории, как правило, малы. Действительно, на подбарьерных траекториях действие оказывается мнимым $S = i\,|S|$ — что соответствует экспоненциальной подавленности таких траекторий $P\propto e^{-|S|}$.

Функциональный интеграл для квантовой теории поля

Абсолютно всё вышесказанное непосредственно обобщается и на квантовую теорию поля — для этого нужно лишь вспомнить, что квантовая теория поля эквивалентна квантовой механике из большого (в пределе — континнума) числа частиц — и именно из этих соображений мы строили квантовую теорию поля на самой первой лекции. Для построения такой аналогии, помимо дискретизации времени (от построения функционального интеграла) введём также и дискретизацию пространства, разбив его на ячейки размера $a^{d/2}$. Величину поля в дискретных узлах можно обознчать $\phi_{\boldsymbol{x},t}\equiv\phi(\boldsymbol{x},t)\cdot a^{d/2}$, и импульсы $\pi_{\boldsymbol{x},t}\equiv\pi(\boldsymbol{x},t)\cdot a^{d/2}$. Такое обозначение, в частности, даст коммутационные соотношения $[\hat{\phi}_{\boldsymbol{x}},\hat{\pi}_{\boldsymbol{y}}] = [\hat{\phi}(\boldsymbol{x}),\hat{\pi}(\boldsymbol{y})]\cdot a^d = i\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\cdot a^d\equiv i\delta_{\boldsymbol{xy}}$ — канонические соотношения для координат и импульсов. Поэтому заменяя действие на его дискретный аналог $S[\{\phi_{\boldsymbol{x}}\}] = \frac{1}{2}L_{ij}\phi_i\phi_j$ $(i = (\boldsymbol{x},t))$, и квантуя изложенным выше способом полученную систему, мы приходим ровно к тому же результату, а именно:

$$\langle\Omega|\,\hat{\mathcal{T}}\{\hat{\phi}(x_1)\dots\hat{\phi}(x_N)\}\,|\Omega\rangle = \frac{\int\mathcal{D}[\phi(x)]\cdot\phi(x_1)\dots\phi(x_N)\cdot\exp(iS[\phi(x)])}{\int\mathcal{D}[\phi(x)]\cdot\exp(iS[\phi(x)])} \tag{8}$$

Функциональный интеграл теперь нужно понимать в смысле дискретизации как пространственно, так и временной, и интегрированию по $\prod_{\boldsymbol{x},t}d\phi_{\boldsymbol{x},t}$.

О дискретных Гауссовых интегралах

Поскольку так или иначе мы вынуждены иметь дело с Гауссовыми интегралами, поэтому давайте сразу обсудим общие свойства Гауссовых интегралов.

Вещественные гауссовы интегралы В вещественном случае, гауссов вес определяется согласно $P(\{\phi\}) = \exp(-\frac{1}{2}\phi_i L_{ij}\phi_j)$ с некоторой симметричной матрицей L_{ij}. Симметричную матрицу можно диагонализовать ортогональным преобразованием $\hat{O}$, так что $\hat{L} = \hat{O}\hat{\Lambda}\hat{O}^T$ где $\Lambda = \mathrm{diag}(\Lambda_1, \ldots, \Lambda_N)$; и совершим ортогональное преобразование (с единичным якобианом) к переменным $\phi = \hat{O}\psi$, и получить следующий интеграл:

$$Z = \int d\phi \exp\left(-\frac{1}{2}\phi_i L_{ij}\phi_j\right) = \int d\psi \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_i \Lambda_i \psi_i^2\right) = \prod_i \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda_i}} = \frac{(2\pi)^{N/2}}{\sqrt{\det \hat{L}}} \tag{9}$$

Для вычисления средних значений ϕ удобно ввести так называемый производящий функционал:

$$Z[J] = \int d\phi \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}\phi_i L_{ij}\phi_j + J_i\phi_i\right) = Z[0]\cdot\left\langle e^{iJ_i\phi_i}\right\rangle \tag{10}$$

и тогда, например, двойной коррелятор имеет вид:

$$\langle\phi_i\phi_j\rangle = \frac{1}{Z}\cdot\left.\frac{\partial^2 Z[J]}{\partial J_i \partial J_j}\right|_{J=0} \tag{11}$$

Для вычисления производящего функционала мы тоже диагонализуем матрица, а затем произведём сдвижку при взятии уже расцепленных интегралов:

$$Z[J] = \int d\psi \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_i \Lambda_i\psi_i^2 + J_j O_{ji}\psi_j\right) = \int d\psi \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_i \Lambda_i(\psi_i + J_j O_{ji}\Lambda_i^{-1})^2 + \frac{1}{2}J_j O_{ji}\Lambda_i^{-1}O_{ik}^T J_k\right) \tag{12}$$

Беря интеграл по ψ, мы получаем $Z[0]$ для квадратичной части, а также остаточный член, который выражается попросту через обратную матрицу $\hat{L}^{-1} \equiv \hat{O}\hat{\Lambda}^{-1}\hat{O}^T$. Получаем важный результат:

$$\boxed{Z[J] = Z[0]\cdot\exp\left(\frac{1}{2}J_i L_{ij}^{-1} J_j\right)} \tag{13}$$

Дифференцируя, мы получаем важный результат — корреляционную функцию $\langle\phi_i\phi_j\rangle = L_{ij}^{-1}$.

Комплексные гауссовы интегралы Иногда также приходится сталкиваться с комплексными теориями поля (мы обсуждали комплексную теорию Клейна-Гордона). Для них гауссов интеграл устроен немного иначе: вес определяется согласно $P(\{\phi,\bar{\phi}\}) = \exp\left(-\bar{\phi}_i L_{ij}\phi_j\right)$ (без 1/2). Интегрирование производится по вещественным и мнимым частям ϕ_i, что мы условно обозначим как $d\phi_i d\bar{\phi}_i \equiv d(\mathrm{Re}\phi_i)d(\mathrm{Im}\phi_i)$. Матрицу $\hat{A}$ можно в таком случае диагонализовать унитарным преобразованием $\hat{U}$, так что $\hat{L} = \hat{U}\hat{\Lambda}\hat{U}^\dagger$, и $\phi = \hat{U}\psi$. Гауссов интеграл запишется в таком случае следующим образом:

$$Z = \int d\phi d\bar{\phi} \exp\left(-\bar{\phi}_i L_{ij}\phi_j\right) = \int d\bar{\psi}d\psi \exp\left(-\sum_i \Lambda_i|\psi_i|^2\right) = \prod_i \frac{\pi}{\Lambda_i} = \frac{\pi^N}{\det \hat{L}} \tag{14}$$

Производящий функционал определяется чуть иначе:

$$Z[J,\bar{J}] = \int d\phi \exp\left(-\bar{\phi}_i L_{ij}\phi_j + \bar{J}_i\phi_i + J_i\bar{\phi}_i\right) = Z[0]\cdot\left\langle e^{\bar{J}_i\phi_i + J_i\bar{\phi}_i}\right\rangle \tag{15}$$

из которого корреляторы извлекаются аналогичным образом:

$$\left\langle\phi_i\bar{\phi}_j\right\rangle = \frac{1}{Z}\cdot\left.\frac{\partial^2 Z[J,\bar{J}]}{\partial\bar{J}_i\partial J_j}\right|_{J=0} \tag{16}$$

Интеграл, тем не менее, вычисляется абсолютно аналогично — диагоналиазцией и сдвижкой:

$$\int d\psi \exp\left(-\sum_i \Lambda_i|\psi_i|^2 + \bar{J}_j U_{ji}\psi_i + \bar{\psi}_i U_{ij}^\dagger J_j\right) = \int\int d\psi \exp\left(-\sum_i \Lambda_i\left(\bar{\psi}_i - \Lambda_i^{-1}\bar{J}_j U_{ji}\right)\left(\psi_i - \Lambda_i^{-1}U_{ij}^\dagger J_j\right) + \bar{J}_j U_{ji}\Lambda_i^{-1}U_{ik}^\dagger J_k\right) \tag{17}$$

И опять собирается обратная матрица $\hat{L}^{-1} = \hat{U}\hat{\Lambda}^{-1}\hat{U}^\dagger$, а результат получается следующим:

$$\boxed{Z[J,\bar{J}] = Z[0]\cdot\exp\left(\bar{J}_i L_{ij}^{-1} J_j\right)} \tag{18}$$

В частности, из этого выражения следуют следующие корреляционные функции: $\left\langle\phi_i\bar{\phi}_j\right\rangle = L_{ij}^{-1}$, $\quad\langle\phi_i\phi_j\rangle = \left\langle\bar{\phi}_i\bar{\phi}_j\right\rangle = 0$.

Теорема Вика Если бы мы хотели посчитать коррелятор, скажем, четвёртого порядка (давайте пока сфокусируемся на вещественном случае, как на более простом), нам требовалось бы взять коррелятор четвёртого порядка:

$$\langle \phi_i \phi_j \phi_k \phi_l \rangle = \frac{1}{Z} \cdot \left. \frac{\partial^4 Z[J]}{\partial J_i \partial J_j \partial J_k \partial J_l} \right|_{J=0} \tag{19}$$

Для того, чтобы получить не ноль — нам нужно два раза продифференцировать экспоненту (что «выдаст» член в предэкспоненту) и два раза — возникающие при этом предэкспоненциальные множители. Перебор всех возможных случаев сведётся к тому, что необходимо рассматривать *спаривания* различных членов. И «спаривание», скажем, ϕ_i и ϕ_j означает, что производная $\frac{\partial}{\partial J_i}$ действует на экспоненту, а $\frac{\partial}{\partial J_j}$ — на возникающий при этом преэкспоненциальный множитель, и наоборот. Несложно убедиться, что процедура «выдаст» попросту $L_{ij}^{-1} = \langle \phi_i \phi_j \rangle$. Это приводит нас к теореме Вика:

$$\langle \phi_i \phi_j \phi_k \phi_l \rangle = \langle \phi_i \phi_j \rangle \langle \phi_k \phi_l \rangle + \langle \phi_i \phi_k \rangle \langle \phi_j \phi_l \rangle + \langle \phi_i \phi_l \rangle \langle \phi_j \phi_k \rangle \,, \tag{20}$$

которая известным образом обобщается и на произвольный старший коррелятор. Этим и доказывается теорема Вика для Гауссовых случайных распределений.

Функция Грина свободного поля

Вернёмся теперь к свободной квантовой теории поля, которая даётся квадратичным действием — например, теорию Клейна-Гордона $S = \frac{1}{2}\int d^4x((\partial_\mu \phi)^2 - m^2\phi^2)$. Естественно, мы введём дискретизацию и будем пользоваться результатами предыдущих пунктов. Есть несколько отличий, которые, впрочем, практически не влияют на результат. Первое отличие заключается в том, что вес комплексный и имеет вид e^{iS} , поэтому производящий функционал определяется тоже немного иным образом — с дополнительной мнимой единицей:

$$Z[J(x)] = \int \mathcal{D}[\phi(x)] \exp\left(iS[\phi(x)] + i\int J(x)\phi(x)dx \right) \equiv Z[0] \cdot \left\langle \exp\left(i\int J(x)\phi(x)dx \right) \right\rangle_0 \tag{21}$$

и корреляторы считаются следующим образом:

$$\langle \phi(x)\phi(y) \rangle = \frac{1}{Z} \left. \left(-i\frac{\delta}{\delta J(x)} \right) \left(-i\frac{\delta}{\delta J(y)} \right) Z[J(x)] \right|_{J=0} \tag{22}$$

Для квадратичного действия вида $S[\phi(x)] = \frac{1}{2}\int dx \phi(x)\hat{L}\phi(x)$, всё вышесказанное тоже работает (учётом замены $L_{ij} \mapsto -i\hat{L}$ и $J_i \mapsto iJ(x)$, а значит $L_{ij}^{-1} \mapsto i\hat{L}^{-1} \equiv i\hat{G}$ — функция Грина соответствующего оператора!), для производящего функционала ответ оказывается следующим:

$$\boxed{Z[J(x)] = Z[0] \cdot \exp\left(-\frac{i}{2}\int dxdy J(x)G(x-y)J(y) \right)} \tag{23}$$

и тем самым мы доказываем следующее утверждение, которое мы получали ранее: коррелятор связан с функцией Грина классических уравнений движения — $\langle \phi(x)\phi(y) \rangle = iG(x-y)$!

Тут есть проблема — в теории Клейна-Гордона оператор $\hat{L} = -\partial^2 - m^2$ имеет нулевые моды — плоские волны e^{ipx} с соотношением $p^2 = m^2$, и поэтому оператор, вообще говоря необратим. При попытке же решить задачу через преобразование Фурье это «выскакивает» как наличие полюсов по энергии $\omega = \pm\sqrt{\boldsymbol{p}^2 + m^2}$, которые лежат чисто на вещественной оси; различные способы обхода этих полюсов приводят к различным способам обращения оператора и, соответственно, к различным функциям Грина. Для того, чтобы увидеть, что мы имеем дело именно с Фейнмановской функцией Грина и соответствующий ему способ обхода полюсов — необходимо вспомнить про маленькую мнимую часть у времени $T(1-i\epsilon)$ — что соответствует маленькому повороту в комплексной плоскости времени, или, что эквивалентно, повороту в плоскости частот в обратном направлении $\omega \mapsto \omega(1+i\epsilon)$ (поворот контура на малый угол против часовой стрелки). Такой поворот как раз определяет нам правило обхода полюсов — полюс $\omega = -\sqrt{\boldsymbol{p}^2 + m^2}$ необходимо обходить снизу, в $\omega = +\sqrt{\boldsymbol{p}^2 + m^2}$ — сверху.

Таким образом, тот факт что Фейнмановский пропагатор соответствовал функции Грина классических уравнений движения — оказывается вовсе не совпадением, но утверждением самого общего характера.

Теория возмущений

Наконец, представление функционального интеграла также позволяет тривиально строить теорию возмущений, которая в точности воспроизводит теорию возмущений, которую мы обсуждали на прошлом семинаре. В частности, пусть действие имеет вид $S = S_0 + S_{int}$; тогда для корреляторов можно записать:

$$\langle \phi(x)\phi(y) \rangle = \frac{\int \mathcal{D}\phi \phi(x)\phi(y) e^{iS_0 + iS_{int}} / \int \mathcal{D}\phi \cdot e^{iS_0}}{\int \mathcal{D}\phi e^{iS_0 + iS_{int}} / \int \mathcal{D}\phi e^{iS_0}} = \frac{\left\langle \phi(x)\phi(y) e^{iS_{int}} \right\rangle_0}{\left\langle e^{iS_{int}} \right\rangle_0} \tag{24}$$

Раскладывая экспоненту в ряд и применяя теорему Вика, мы получим диаграммный ряд Фейнмана, который в точности воспроизводит полученный ранее (в частности, $S_{int} = -\int dt V_{int}$).