

# Задачи к лекции «Графен»

## Упражнения (20 баллов)

**Упражнение 1 (10 баллов)** Выведите гамильтониан для электронов из долины  $K'$ .

**Упражнение 2 (5 баллов)** Выпишите волновые функции электронов с импульсом  $\mathbf{p}$  из долины  $K$  (то есть полный квазиимпульс равен  $\mathbf{K} + \mathbf{p}$ ).

**Упражнение 3 (5 баллов)** Реальные значения туннельного матричного элемента для графена равно  $t \simeq 3.11$  эВ, а постоянная решётки равна  $a \simeq 1.42$  Å. Чему равна групповая скорость электронов? До каких температур низкоэнергетическое приближение оправдано?

## Задачи (80 баллов)

### Задача 1. Одномерная модель (30 баллов)

Рассмотрите одномерный прыжковый гамильтониан на цепочке длины  $L$  из  $N$  узлов, с периодическими граничными условиями:

$$\hat{H} = -t \sum_n (\hat{a}_n^\dagger \hat{a}_{n+1} + h.c) \quad (1)$$

1. Диагонализуйте гамильтониан, введя операторы рождения и уничтожения частиц с фиксированным квазиимпульсом,  $\hat{a}_k$  и  $\hat{a}_k^\dagger$ . Найдите закон дисперсии квазичастиц.
2. Пусть эта система описывает бесспиновые фермионы, концентрация которых  $n$ . Покажите, что основное состояние соответствует заполнению состояний с  $k \in (-k_F, k_F)$ . Как «Ферми-импульс»  $k_F$  связан с  $n$ ?
3. Низкоэнергетические возбуждения возникают вблизи Ферми-точек, и представляют собой частицы движущиеся влево (вблизи  $-k_F$ ) и вправо (вблизи  $k_F$ ). Введите поля  $\hat{\psi}(x) = (\hat{\psi}_L(x), \hat{\psi}_R(x))$ , и постройте низкоэнергетическую теорию поля.

### Задача 2. Klein paradox (20 баллов)

Рассмотрите электрон, движущийся в графене в долине  $K$  с гамильтонианом  $\hat{H} = v(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})$ . На лист графена напылён потенциальный барьер, описываемый следующим потенциалом:

$$V(x, y) = \begin{cases} V_0, & x \in [-D/2, D/2] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}, \quad (2)$$

(плавный потенциал — считая  $D \gg a$  — одинаково действует на подрешётки  $A$  и  $B$ ). Пусть электрон с энергией  $E > 0$  налетает по нормали на ступеньку. Найдите коэффициенты прохождения  $T$  и отражения  $R$ .

### Задача 3. Поглощение света (30 баллов)

Рассмотрите лист графена, на который по нормали падает плоско-поляризованная электромагнитная волна частоты  $\omega_0$ . Исследуйте поглощение электромагнитного излучения.

1. Электромагнитное поле — калибровочное, поэтому взаимодействие с электронами описывается стандартным образом, путём замены импульса  $\hat{\mathbf{p}}$  на «ковариантную производную»  $\hat{\mathbf{p}} - \frac{e}{c}\mathbf{A}$ , и  $\mathbf{A}$  — вектор-потенциал. Выпишите вектор-потенциал, описывающий такую задачу (в калибровке Вейля  $\varphi = 0$ ).

2. Используя золотое правило Ферми, вычислите поглощение энергии листом графена  $\frac{dE_{abs}}{dt}$ . Используйте тот факт, что единственный способ выполнить закон сохранения энергии и импульса — это переброска электрона из заполненной валентной зоны (ветви спектра  $E_{\mathbf{p}}^{(-)}$ ) в пустую зону проводимости (ветви спектра  $E_{\mathbf{p}}^{(+)}$ ). Не забудьте учесть вырождения по спинам и долинам. Полученная величина должна быть пропорциональна площади листа  $A^1$ , которая возникнет из-за суммирования по начальным состояниям.
3. Вычислите вектор Пойнтинга падающей волны  $\mathcal{S}$ , и полное количество энергии, падающей на лист  $\frac{dE_{tot}}{dt} = S \cdot A$ . Найдите коэффициент поглощения  $\frac{dE_{abs}/dt}{dE_{tot}/dt}$ .

---

<sup>1</sup>Конечно, более осмыслена ситуация, когда на графен светят лазером с конечной площадью пятна  $A$ . Однако, пока пятно макроскопически большое,  $A \gg a^2$ , ничего не изменится.