Задачи к лекции «Фононы»

25 марта 2019 г.

Упражнение (20 баллов)

Покажите, что теорию, описывающую только продольные фононы, можно описать в терминах скалярного поля $\varphi(\boldsymbol{r})$, которое определяется через Фурье как $\varphi_{\boldsymbol{k}} = (\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{u}_{\boldsymbol{k}})/|k|$. Покажите, что теория поля, описывающая поле $\varphi(\boldsymbol{r})$, с точностью до обозначений совпадает с безмассовой теорией Клейна-Гордона, со скоростью света заменённой на скорость продольного звука $c \equiv c_l$:

$$\hat{H}_{\text{ph}} = \frac{\rho}{2} \int d\boldsymbol{r} \left[\hat{\pi}^2 + c^2 (\nabla \hat{\varphi})^2\right] \tag{1}$$

Задачи (80 баллов)

Задача 1. Время жизни фонона-1 (50 баллов)

Рассмотрите модель трёхмерного металла, описывающую электроны, взаимодействующие с фононами:

$$\hat{H} = \int d\boldsymbol{r} \left[\hat{\psi}^\dagger \left(-\frac{1}{2m}\Delta - \mu\right) \hat{\psi} + \frac{\rho}{2}\left(\hat{\pi}^2 + c^2 (\nabla\hat{\varphi})^2\right) + \frac{gn}{\nu}\hat{\psi}^\dagger \hat{\psi}(|\nabla|\hat{\varphi})\right] = \sum_{\boldsymbol{p}} \epsilon_{\boldsymbol{p}} \hat{c}^\dagger_{\boldsymbol{p}} \hat{c}_{\boldsymbol{p}} + \sum_{\boldsymbol{k}} \omega_{\boldsymbol{k}} \hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k}} \hat{a}_{\boldsymbol{k}} + \hat{H}_{\text{e-ph}}$$

$$\epsilon_{\boldsymbol{p}} = \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m} - \mu, \quad \omega_{\boldsymbol{k}} = c|\boldsymbol{k}|, \quad [\hat{a}_{\boldsymbol{p}}, \hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{q}}] = \{\hat{c}_{\boldsymbol{p}}, \hat{c}^\dagger_{\boldsymbol{q}}\} = \delta_{\boldsymbol{p}\boldsymbol{q}}$$

(оператор $|\nabla|$ действует в Фурье-пространстве как домножение на $i|k|$). Концентрация электронов равна n. Вычислите время жизни фонона с частотой ω в такой системе — волновая функция которой представляет собой произведение волновой электронной системы $|\Omega\rangle$ (заполненная Ферми-сфера) и фононного вакуума $|0\rangle$.

1. Предлагается использовать золотое правило Ферми, используя $\hat{H}_{e-ph}$ как возмущение. Начальное состояние содержит фонон импульсом $\boldsymbol{k}$: $|i\rangle = \hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k}} |0\rangle$. Конечное состояние содержит электрон-дырочную пару $|f\rangle = \hat{c}^\dagger_{\boldsymbol{p}_1} \hat{c}_{\boldsymbol{p}_2} |\Omega\rangle$ (при этом импульс электрона равен $\boldsymbol{p}_1$ и $|\boldsymbol{p}_1| > p_F$; а импульс дырки равен $-\boldsymbol{p}_2$ и $|\boldsymbol{p}_2| < p_F$). Покажите, что только такие матричные элементы отличны от нуля $H^{\text{e-ph}}_{fi} = \langle i| \hat{H}_{\text{e-ph}} |f\rangle \neq 0$. Вычислите матричный элемент; покажите, что он отличен от нуля при выполнении закона сохранения импульса $\boldsymbol{k} = \boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{p}_2$.

2. Вычислите энергию начального состояния ϵ_i и конечного состояния ϵ_f.

3. Время жизни определяется скоростью переходов $w_{i\to f} = 2\pi \left|H^{(e-ph)}_{if}\right|^2 \delta(\epsilon_i - \epsilon_f)$, просуммированному по всем конечным состояниям $\tau_i^{-1} = \sum_f w_{i\to f}$. Покажите, что у этого выражения имеется конечный предел бесконечного объема системы $V \to \infty$ (с заменой сумм по импульсам на интегралы).

4. Чтобы разобраться с кинематикой рассеяния, удобно параметризовать конечные импульсы согласно $\boldsymbol{p}_{1,2} = \boldsymbol{p} \pm \frac{\boldsymbol{k}}{2}$, что автоматически удовлетворяет закону сохранения импульса. Энергию и импульс фонона нужно считать малыми, так что $\omega \ll E_F$ и $k \ll p_F$.

5. Выразите ответ через безразмерный параметр $\zeta = \frac{g^2 n^2}{\nu \rho c^2}$.

Литература ЛШ, глава 6 «электроны и фононы», задача 31.

Задача 2. Время жизни фонона-2 (30 баллов)

При выводе гамильтониана фононов мы раскладывались по малости отклонения атомов от положения равновесия, $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r})$. Учёт подобных эффектов приведёт к появлению нелинейных членов в гамильтониане — членов вида $\lambda \int d\boldsymbol{r} \hat{\varphi}^3$ (и старших). В таком случае, фононы — состояния $|\boldsymbol{k}\rangle = \hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k}} |0\rangle$ — уже не являются собственными состояниями гамильтониана, а имеют конечное время жизни. Убедитесь, что если закон дисперсии имеет отрицательную кривизну, $\omega_{\boldsymbol{k}} \simeq ck - \alpha k^3$ (α мало; в частности, ровно такую кривизну имеет спектр в модели атомов со взаимодействием между ближайшими соседями — $\omega_{\boldsymbol{k}} = \frac{2c}{a} |\sin \frac{ka}{2}| \sim ck - \frac{c}{24} k^3 a^2$), то время жизни, вычисленное по золотому правилу Ферми, оказывается бесконечным чисто из кинематических соображений[1].

[1] Говорят, что такой спектр **нераспадный**