

Функции Грина

Двухточечные корреляционные функции

Как мы выяснили на различных примерах, решение физических задач с помощью методов квантовой теории поля сводится к вычислению различных **корреляционных функций** — вакуумных средних от полевых операторов (или операторов рождения и уничтожения, которые с ними линейно связаны). Для демонстрации ключевых объектов, которые при этом возникают, вернёмся к вещественной теории Клейна-Гордона. Мы будем интересоваться корреляторами вида $\langle 0 | \hat{\phi}(x_1) \hat{\phi}(x_2) \dots | 0 \rangle$.

Систематический способ вычисления таких корреляционных функций следующий. Полевые операторы можно представить в виде $\hat{\phi}(x) = \hat{\phi}^{(+)}(x) + \hat{\phi}^{(-)}(x)$, где $\hat{\phi}^{(+)}(x)$ содержит только операторы рождения $\hat{a}_{\mathbf{p}}^{\dagger}$, а $\hat{\phi}^{(-)}(x)$ — содержащую только операторы уничтожения $\hat{a}_{\mathbf{p}}$; поэтому про них известно следующее:

$$\hat{\phi}^{(-)}(x) | 0 \rangle = \langle 0 | \hat{\phi}^{(+)}(x) \equiv 0 \quad (1)$$

После разбиения, достаточно использовать коммутационные соотношения и тот факт, что $[\hat{\phi}^{(+)}(x_1), \hat{\phi}^{(-)}(x_2)]$ — это уже не оператор, а число, и «протащить» все $\hat{\phi}^{(-)}$ «направо», а $\hat{\phi}^{(+)}$ — «налево»¹, после чего их действие мы знаем — тождественный ноль. Все члены, которые при этом по пути «выпадут» за счёт коммутаторов, и дадут ответ. В качестве демонстрации, посчитаем таким способом самую тривиальную двухточечную корреляционную функцию:

$$\begin{aligned} D(x-y) &\equiv \langle 0 | \hat{\phi}(x) \hat{\phi}(y) | 0 \rangle = \langle 0 | (\hat{\phi}^{(+)}(x) + \hat{\phi}^{(-)}(x)) (\hat{\phi}^{(+)}(y) + \hat{\phi}^{(-)}(y)) | 0 \rangle = \langle \hat{\phi}^{(-)}(x) \hat{\phi}^{(+)}(y) \rangle = \\ &= \langle 0 | [\hat{\phi}^{(-)}(x), \hat{\phi}^{(+)}(y)] + \hat{\phi}^{(+)}(y) \hat{\phi}^{(-)}(x) | 0 \rangle = [\hat{\phi}^{(-)}(x), \hat{\phi}^{(+)}(y)] \quad (2) \end{aligned}$$

Последнее считается тривиально, используя разложение полевых операторов по лестничным:

$$\hat{\phi}(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{p}} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} (\hat{a}_{\mathbf{p}} e^{-ipx} + \hat{a}_{\mathbf{p}}^{\dagger} e^{ipx}) \quad (3)$$

$$D(x-y) = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{p}} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} e^{-ip(x-y)} = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{p}}} e^{-ip(x-y)} \quad (4)$$

Обратим внимание, что этот объект лоренц-инвариантен, поскольку таковой является «мера» $\int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{p}}}$; напомним, что мы используем обозначения, в которых в экспоненте стоит произведение четыре-векторов: $p(x-y) \equiv p_{\mu}(x-y)^{\mu} = E_{\mathbf{p}}(x^0-y^0) - \mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})$; в частности, эта корреляционная функция может зависеть только от интервала $s^2 = (x-y)^2 = (x^0-y^0)^2 - (\mathbf{x} - \mathbf{y})^2$.

Свойства причинности и запаздывающий пропагатор

Гораздо более интересным объектом является коммутатор полей в двух точках x и y . Из курса квантовой механики известно, что если два эрмитовых оператора коммутируют, то у них имеется общий базис; более того, это значит, что акт взаимодействия («измерения» поля) в одной точке никак не может повлиять на результат взаимодействия с таким полем (его измерение) в другой такой точке. Коммутатор отражает свойства **причинности** теории поля.

Поскольку полевые операторы — линейны по операторам рождения и уничтожения, то коммутатор — просто число. Тем самым, можно свести задачу к предыдущей:

$$[\hat{\phi}(x), \hat{\phi}(y)] = \langle 0 | \hat{\phi}(x) \hat{\phi}(y) - \hat{\phi}(y) \hat{\phi}(x) | 0 \rangle = D(x-y) - D(y-x) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{p}}} (e^{-ip(x-y)} - e^{ip(x-y)}) \quad (5)$$

¹Говорят — «нормально упорядочить» выражение. Само выражение, в котором все операторы уничтожения стоят справа, а рождения — слева, называют *нормально упорядоченным*

Для исследования полученного результата можно воспользоваться следующим соображением. Пусть x и y связаны пространственно-подобным интервалом, так что $s^2 = (x - y)^2 = -\mathbf{r}^2 < 0$. Это означает, что в выражении можно совершить буст — преобразование Лоренца, перемешивающее энергию $E_{\mathbf{p}}$ и импульс $\mathbf{p}$ — который уберёт нулевую компоненту скалярного произведения, и в экспоненте будет стоять $p(x - y) = -\mathbf{p}\mathbf{r}^2$. Полученный интеграл нечетён по импульсу, и тем самым зануляется. Если же они связаны временно-подобным интервалом, то есть $s^2 = t^2 > 0$, то подобный трюк позволит привести выражение к виду $p(x - y) = E_{\mathbf{p}}t$; в результате чего под интегралом будет стоять вполне конечное ненулевое выражение. Таким образом, принцип причинности, гласящий, что события могут быть связаны причинной связью только если интервал между ними времени-подобен, выполняется и в квантовой теории поля.

В соответствии с этим, одним из самых важных объектов в квантовой теории поля является так называемая *запаздывающая функция Грина* (иногда её называют *причинной*), которая определяется с дополнительной функцией Хевисайда, роль которой будет раскрыта позже:

$$D_R(x - y) \equiv \theta(x^0 - y^0) \langle 0 | [\hat{\phi}(x), \hat{\phi}(y)] | 0 \rangle \quad (6)$$

Для выяснения её смысла, вычислим сперва её преобразование Фурье:

$$D_R(\omega, \mathbf{p}) = \int_0^\infty dt e^{i\omega t} \int d^3\mathbf{r} e^{-i\mathbf{p}\mathbf{r}} \int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{q}}} (e^{-iE_{\mathbf{q}}t + i\mathbf{q}\mathbf{r}} - e^{iE_{\mathbf{q}}t - i\mathbf{q}\mathbf{r}}) \quad (7)$$

Интеграл по координате снимается согласно $\int d^3\mathbf{r} e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}} = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p})$. Формально, конечно, интегралы по времени расходятся, и для придания им смысла их нужно регуляризовать следующим образом:

$$\int_0^\infty e^{i\omega t} dt \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^\infty e^{i\omega t - \epsilon t} dt = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{i}{\omega + i\epsilon} \equiv \frac{i}{\omega + i0} \quad (8)$$

Обратим внимание, что такой способ регуляризации даёт выражение, совместное с правилом обхода полюсов при взятии обратного преобразования Фурье, используя методы ТФКП. Другим способом воспринимать эту инфинитезимальную добавку — это в используя формулу Сохоцкого, согласно которой $\frac{1}{\omega + i0} = \mathcal{P} \frac{1}{\omega} - i\pi\delta(\omega)$. Используя эти правила, мы приходим к следующему результату:

$$D_R(\omega, \mathbf{p}) = \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} \left(\frac{i}{\omega - E_{\mathbf{p}} + i0} - \frac{i}{\omega + E_{\mathbf{p}} + i0} \right) = \frac{i}{(\omega + i0)^2 - E_{\mathbf{p}}^2} = \frac{i}{p^2 - m^2}, \quad (9)$$

где последний знак равенства нужно понимать символически, не забывая о правиле обхода полюсов при вычислении интегралов по ω — полюса $\omega = \pm E_{\mathbf{p}} - i0$ обходятся сверху особенностей. Наконец, последнее же равенство в действительности означает, что запаздывающая функция Грина удовлетворяет следующему уравнению:

$$(-\partial^2 - m^2)D_R(x) = i\delta^{(4)}(x), \quad (10)$$

то есть с точностью до множителя³ i она совпадает с **запаздывающей функцией Грина** классического уравнения Клейна-Гордона! В действительности же, это самое общее свойство — такого рода выражения работают в самых разных теориях поля.

Фейнмановский пропагатор

При построении теории возмущений естественным образом возникает такой объект, как Т-упорядочение (оно же *хронологическое упорядочение*, или *временное упорядочение*). Этот объект определяется как формальный символ, применяемый к набору операторов в Гейзенберговском представлении, и упорядочивающий их по убыванию времён:

$$\hat{T}\{\hat{A}(t_1)\hat{B}(t_2)\} = \begin{cases} \hat{A}(t_1)\hat{B}(t_2), & t_1 > t_2 \\ \pm\hat{B}(t_2)\hat{A}(t_1), & t_1 < t_2 \end{cases} \quad (11)$$

(для бозе-статистики в нижнем знаке равенства ставится «+», для ферми — если операторы $\hat{A}$ и $\hat{B}$ антикоммутируют — «-»). Через него определяется и самый важный объект для квантовой теории поля и диаграмной техники — это *фейнмановская функция Грина* (которую, так же как и запаздывающую, тоже часто называют *причинной*):

$$D_F(x - y) = \langle 0 | \hat{T}\{\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y)\} | 0 \rangle \quad (12)$$

Для вычисления её Фурье-образа можно явно раскрыть символ временного упорядочения используя функции Хевисайда $D_F(x - y) \equiv \theta(x^0 - y^0)D(x - y) + \theta(y^0 - x^0)D(y - x)$; дальнейшее вычисление абсолютно аналогично и прямолинейно:

²На самом деле, конечно, даже к виду $-p_z|\mathbf{r}|$

³В cond-mat запаздывающую функцию Грина часто вводят с дополнительным множителем $-i$, как раз чтобы в уравнении никаких множителей не было

$$D_F(\omega, \mathbf{p}) = \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} \left(\int_0^\infty dt e^{i\omega t} e^{-iE_{\mathbf{p}}t} + \int_{-\infty}^0 dt e^{i\omega t} e^{iE_{\mathbf{p}}t} \right) = \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} \left(\frac{i}{\omega - E_{\mathbf{p}} + i0} - \frac{i}{\omega + E_{\mathbf{p}} - i0} \right) = \frac{i}{\omega^2 - (E_{\mathbf{p}} - i0)^2} = \frac{i}{p^2 - m^2 + i0} \quad (13)$$

Полученный объект уже не обладает свойствами причинности, как запаздывающая функция Грина — в частности, он отличен от нуля во всём пространстве (хотя вне светового конуса — для пространственно-подобных интервалов — он экспоненциально затухает). От запаздывающей функции Грина его отличает только правило обхода полюсов — расположение инфинитезимальной мнимой добавки $i0$ — которое говорит нам о том, что полюса по ω расположены в точках $\omega = \pm \sqrt{E_{\mathbf{p}}^2 - i0} = \pm(E_{\mathbf{p}} - i0)$ — поэтому полюс $-E_{\mathbf{p}}$ нужно обходить снизу, а полюс $+E_{\mathbf{p}}$ — сверху. Несложно видеть, что полученный объект тоже является функцией Грина классического уравнения Клейна-Гордона:

$$(-\partial^2 - m^2)D_F(x) = i\delta^{(4)}(x) \quad (14)$$

Старшие корреляционные функции

Выше мы обсудили вопрос вычисления, вообще говоря, любых вакуумных средних, и продемонстрировали метод на примере двухточечной корреляционной функции $D(x - y)$. Для, скажем, четырёхточечной корреляционной функции можно применить этот способ непосредственно, что представляет собой, однако, достаточно объёмное вычисление. К счастью, такую процедуру можно провести в самом общем виде⁴ — и в конечном итоге получить рецепт, который носит название **теоремы Вика**.

Рецепт следующий: нужно рассмотреть все возможные различные **спаривания** — разбиения полей на пары — и каждому спариванию поставить в соответствие произведение двухточечных корреляторов, составленных из спаренных полей; полученный результат просуммировать по всевозможным спариваниям⁵. Продемонстрируем это на примере четырёхточечной корреляционной функции:

$$\langle \hat{\phi}_1 \hat{\phi}_2 \hat{\phi}_3 \hat{\phi}_4 \rangle = \langle \hat{\phi}_1 \hat{\phi}_2 \rangle \langle \hat{\phi}_3 \hat{\phi}_4 \rangle + \langle \hat{\phi}_1 \hat{\phi}_3 \rangle \langle \hat{\phi}_2 \hat{\phi}_4 \rangle + \langle \hat{\phi}_1 \hat{\phi}_4 \rangle \langle \hat{\phi}_2 \hat{\phi}_3 \rangle \quad (15)$$

Приведём сразу несколько важных уточнений.

1. Теорема Вика работает в применении не к усреднению по произвольному состоянию, а только к вакууму $|0\rangle$.
2. Она работает для произвольных линейных комбинаций операторов рождения и уничтожения (полевые операторы являются лишь частным случаем). В частности, вместо полевых операторов там могут стоять сами операторы рождения и уничтожения.
3. Немаловажно, теорему Вика можно тривиально модифицировать для случая T -упорядоченных средних: а именно, в правой части достаточно брать Фейнмановские корреляторы. Это несложно понять исходя из того, что T -упорядочение является лишь формальным символом; теорему Вика можно применить и после, собственно, упорядочения.

Фермионы

Для фермионов теорема Вика тоже работает, но с небольшими поправками:

1. Усреднение может происходить не только по вакууму $|0\rangle$, а и по произвольному Слетеровскому детерминанту (или, что эквивалентно, волновой функции в представлении чисел заполнения — но не их линейной комбинации!). Для этого достаточно заметить, что для состояний с числами заполнения $n_k = 1$ можно поменять местами операторы рождения и уничтожения (перейти от *частичного* к *дырочному* представлению) — ввести $\hat{a}' = \hat{a}^\dagger$ и $\hat{a}'^\dagger = \hat{a}$, так что числа заполнения станут нулевыми $\hat{n}' = \hat{a}'^\dagger \hat{a}' = \hat{a} \hat{a}^\dagger = 1 - \hat{a}^\dagger \hat{a} = 1 - \hat{n}$; а состояние в новом представлении станет вакуумом $|0\rangle$.
2. Поскольку фермионные операторы антикоммутируют, то при замене $\hat{\psi}^{(-)}\hat{\psi}^{(+)} = \{\hat{\psi}^{(-)}, \hat{\psi}^{(+)}\} - \hat{\psi}^{(+)}\hat{\psi}^{(-)}$ перед некоторыми членами будет возникать знак «минус». В действительности же, перед каждым членом стоит дополнительный фактор $(-1)^P$ — знак соответствующей *перестановки*. Тут P — число перестановок, которые необходимо совершить, чтобы привести операторы к такому порядку, что «спаренные» операторы окажутся рядом в том же порядке. В частности, для четырёхточечного коррелятора изменился бы знак перед вторым членом:

$$\langle \hat{\psi}_1 \hat{\psi}_2 \hat{\psi}_3 \hat{\psi}_4 \rangle_{Fermi} = \langle \hat{\psi}_1 \hat{\psi}_2 \rangle \langle \hat{\psi}_3 \hat{\psi}_4 \rangle - \langle \hat{\psi}_1 \hat{\psi}_3 \rangle \langle \hat{\psi}_2 \hat{\psi}_4 \rangle + \langle \hat{\psi}_1 \hat{\psi}_4 \rangle \langle \hat{\psi}_2 \hat{\psi}_3 \rangle \quad (16)$$

⁴Это проделано в книге Пескин и Шрёдер (2001, глава 4.3 «Теорема Вика»)

⁵Для нечётного числа полей ответ — ноль (что очевидно, поскольку членов с одинаковым количеством операторов $\hat{a}$ и $\hat{a}^\dagger$ не будут — а только они дают вклад в ответ). Для чётного числа полей $(2N)$ несложная комбинаторика подсказывает, что общее количество спариваний — $(2N)!/2^N N!$.

3. Такое определение согласовано с выбором знака « $-$ » в определении T -упорядочения, поэтому теорема Вика не требует никаких модификаций для случая T -упорядоченных корреляторов.

Список литературы

Пескин, М. и Д. Шрёдер (2001). *Введение в квантовую теорию поля*. НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика».