Задачи к лекции «Функции Грина»

Упражнения (40 баллов)

Упражнение 1. Теорема Вика (15 баллов)

1. **(как нельзя делать)** Пусть $|n\rangle$ — n-тое возбуждённое состояние квантового осциллятора. Вычислите $\langle n|\, \hat{a}\hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger\, |n\rangle$. Сравните с результатом, который получился бы при (ошибочном) применении теоремы Вика и вычислении попарных свёрток.

2. **(«Golden rule»)** Теперь рассмотрите вещественную теорию Клейна-Гордона. Используя теорему Вика, вычислите следующий матричный элемент
$$V_{12,34} = \langle \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2| \left(\frac{\lambda}{4!}\int \hat{\phi}^4(\boldsymbol{x})d^3\boldsymbol{x}\right)|\boldsymbol{p}_3, \boldsymbol{p}_4\rangle \tag{1}$$
(определение $|\boldsymbol{p}\rangle$ вы найдёте в задачах ко второй лекции). Все импульсы можно считать попарно различными.

Упражнение 2. Уравнения движения (15 баллов)

1. Используя только уравнения движения для полевых операторов, покажите явно, что запаздывающий $D_R(x-y) = \theta(x^0-y^0)\left\langle[\hat{\phi}(x), \hat{\phi}(y)]\right\rangle$ и Фейнмановский $D_F(x-y) = \left\langle \hat{T}\{\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y)\}\right\rangle$ пропагаторы действительно являются функциями Грина уравнения Клейна-Гордона (то есть — удовлетворяют уравнению Клейна-Гордона с правой частью $i\delta^{(4)}(x-y)$).

2. Сделайте то же самое для комплексной теории Клейна-Гордона. Покажите, что при этом определение нужно слегка модифицировать (иначе получится ноль):
$$D_R(x-y) = \theta(x^0-y^0)\left\langle[\hat{\phi}(x), \hat{\phi}^\dagger(y)]\right\rangle, \quad D_F(x-y) = \left\langle \hat{T}\{\hat{\phi}(x)\hat{\phi}^\dagger(y)\}\right\rangle \tag{2}$$
(зануление на самом деле связано с наличием $U(1)$-симметрии в задаче — $\phi \mapsto \phi e^{i\alpha}$).

Упражнение 3. Координатное представление (10 баллов)

Выразите коррелятор $D(x-y) = \left\langle \hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y)\right\rangle$ для пространственно-подобной разности $x-y$ (так что $(x-y)^2 = -r^2$) через функцию Макдональда $K_n(z)$. Определите асимптотику при[1] $r \gg m^{-1}$ и $r \ll m^{-1}$. Последняя не должна содержать m, и, очевидно, совпадает с точным пропагатором в безмассовой теории $m=0$.

Задачи (60 баллов)

Задача 1. Простой гармонический осциллятор (20 баллов)

Рассмотрите «$0+1$ -мерную квантовую теорию поля» — квантовую механику простого гармонического осциллятора, который задаётся следующим действием:
$$S[\phi(t)] = \frac{1}{2}\int dt\left(\dot{\phi}^2(t) - \omega_0^2\phi^2(t)\right) \tag{3}$$

1. Перейдите к квантомеханическому описанию, введя операторы координаты и импульса с коммутационным соотношением $[\hat{\phi}, \hat{\pi}] = i$. Постройте операторы рождения и уничтожения $\hat{a}$ и $\hat{a}^\dagger$, диагонализуйте гамильтониан.

2. Решите уравнения Гейзенберга для лестничных операторов. Используя их, вычислите Фейнмановский и запаздывающий пропагаторы:
$$D_F(t_1-t_2) = \left\langle \hat{\mathcal{T}}\{\hat{\phi}(t_1)\hat{\phi}(t_2)\}\right\rangle, \quad D_R(t_1-t_2) = \theta(t_1-t_2)\left\langle[\hat{\phi}(t_1), \hat{\phi}(t_2)]\right\rangle. \tag{4}$$

[1] Если восстановить размерные коэффициенты, то стоящий тут масштаб расстояний — $\hbar/mc$, комптоновская длина волны частицы.

Покажите, что они совпадают с функциями Грина классического уравнения ПГО. Вычислите их Фурье-образы $D_F(\omega)$ и $D_R(\omega)$.

3. Используя только операторные уравнения для движения полей $\hat{\phi}(t)$ и $\hat{\pi}(t)$, покажите явным вычислением, что построенные тут объекты являются функциями Грина уравнения ПГО.

Задача 2. Связь функций Грина (20 баллов)

Пусть $\hat{H}_0$ — произвольный одночастичный гамильтониан (например, $\hat{H}_0 = \frac{\hat{\boldsymbol{p}}^2}{2m} + U(\boldsymbol{x})$). Рассмотрим соответствующую многочастичную задачу с полевым гамильтонианом:

$$\hat{H} = \int d\boldsymbol{x} \hat{\psi}^\dagger(\boldsymbol{x}) \hat{H}_0 \hat{\psi}(\boldsymbol{x}) \tag{5}$$

1. Пусть известен полный набор решений одночастичного уравнения Шрёдингера с гамильтонианом $\hat{H}_0$ — ортонормированные волновые функции $\psi_n(\boldsymbol{x})$ и соответствующие им энергии E_n. Выразите через них полевые операторы, а также запаздывающую *функцию Грина*:

$$G_R(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, t_1 - t_2) = \begin{cases} -i\theta(t_1 - t_2) \left\langle [\hat{\psi}(\boldsymbol{x}_1, t_1), \hat{\psi}^\dagger(\boldsymbol{x}_2, t_2)] \right\rangle, & \text{bosons} \\ -i\theta(t_1 - t_2) \left\langle \{\hat{\psi}(\boldsymbol{x}_1, t_1), \hat{\psi}^\dagger(\boldsymbol{x}_2, t_2)\} \right\rangle, & \text{fermions} \end{cases} \tag{6}$$

2. С другой стороны, выразите через те же величины одночастичную функцию Грина — *резольвенту* — определяемую следующим образом:

$$G_R(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, E) = \langle \boldsymbol{x}_1 | \frac{1}{E - \hat{H}_0 + i0} | \boldsymbol{x}_2 \rangle \tag{7}$$

3. Наконец, вычислите *пропагатор*, описывающий распространение частицы из точки $\boldsymbol{x}_2$ в точку $\boldsymbol{x}_1$ за время $t_1 - t_2$:

$$G_R(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, t_1 - t_2) = -i\theta(t_1 - t_2) \langle \boldsymbol{x}_1 | \hat{U}(t_1 - t_2) | \boldsymbol{x}_2 \rangle, \quad \hat{U}(t) = \exp\left(-i\hat{H}_0 t\right) \tag{8}$$

4. Покажите, что выписанные выше три объекта (которые, вообще говоря, имеют разную структуру и возникают в разных задачах) — эквивалентны друг другу.

5. Вычислите их в импульсном представлении для свободной частицы $U(\boldsymbol{x}) \equiv 0$.

Задача 3. Разичные функции Грина (20 баллов)

Используя полученные знания, вычислите следующие Фейнмановские функции Грина (достаточно сделать это лишь в импульсном представлении!):

1. Функцию Грина свободного Ферми-газа:

$$G_F(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2, t_1 - t_2) = -i \langle \Omega | \hat{\mathcal{T}} \{ \hat{\psi}(\boldsymbol{x}_1, t_1) \hat{\psi}^\dagger(\boldsymbol{x}_2, t_2) \} | \Omega \rangle \tag{9}$$

(где $|\Omega\rangle$ соответствует заполненной Ферми-сфере с импульсами $p < p_F$). Покажите, что если $|\Omega\rangle = |0\rangle$ (фермионов нет), то она совпадает с запаздывающим пропагатором; покажите также, что в общем случае знак инфинитезимальной мнимой части $i0$ в знаменателе как раз определяется заполненностью состояния с соответствующим импульсом в основном состоянии.

2. Функцию Грина продольных фононов:

$$D_F(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2, t_1 - t_2) = \left\langle \hat{\mathcal{T}} \{ \mathrm{div} \hat{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x}_1, t_1) \cdot \mathrm{div} \hat{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x}_2, t_2) \} \right\rangle \tag{10}$$