Диаграммная техника Фейнмана

Теория возмущений

Постановка задачи

Мы с вами научились решать точно решать различные задачи, описываемые гауссовыми (квадратичными) теориями поля. Теперь давайте изучим вопрос о том, как исследовать взаимодействующие теории поля — теории поля, у которых в гамильтониане имеются вершины старших порядков. Сделаем это на примере теории «фи-в-четвёртой» — теории Клейна-Гордона с допонительной поправкой:

$$S_{int} = -\frac{\lambda}{4!}\int d^4x\phi^4(x), \quad \hat{V}_{int} = \frac{\lambda}{4!}\int d^3\boldsymbol{x}\cdot\hat{\phi}^4(\boldsymbol{x}) \tag{1}$$

Величина, которую мы хотим вычислить — это Фейнмановская функция Грина, которая для взаимодействующей теории определяется аналогично как среднее, но уже не по вакууму $|0\rangle$ — а по настоящему основному состоянию взаимодействующей теории $|\Omega\rangle$:

$$D_F(x-y) \equiv \langle\Omega| T\{\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y)\} |\Omega\rangle \tag{2}$$

которая в свободной теории имела вид $D_F(p) = \frac{i}{p^2-m^2+i0}$. Взаимодействие мы будем учитывать в рамках теории возмущений, что в конечном итоге приведёт нас к диаграммной технике Фейнмана.

Получение основного состояния

Первый нетривиальный вопрос — как получить основное состояние $|\Omega\rangle$? Для этого есть два основных трюка, которые мы обсудим ниже — адиабатическое включение взаимодействия, и мнимое время. Оба трюка, в действительности, практически эквивалентны.

Мнимое время Способ первый заключается в следующем. Давайте рассмотрим эволюцию волновой функции из состояния $|0\rangle$ за большое время, которое при этом имеет маленькую мнимую часть $T(1-i\epsilon)$. В таком случае, используя разложения по полному набору собственных состояний гамильтониана, мы получим:

$$e^{-i\hat{H}T(1-i\epsilon)}|0\rangle = \sum_n e^{-iE_nT}e^{-\epsilon E_nT}|n\rangle\langle 0|n\rangle \approx e^{-iE_\Omega T}e^{-\epsilon E_\Omega T}|\Omega\rangle\langle 0|\Omega\rangle \tag{3}$$

Таким образом, такая эволюция действует за счёт малой мнимой части эффективно как проектор на основное состояние — состояние с наименьшей энергией E_Ω. Конечно, тут сразу имеется несколько важных допущений:

- Во-первых, основное состояние должно быть невырождено[1].
- Во-вторых, оно должно перекрываться с вакуумом[2] $\langle 0|\Omega\rangle$.
- В-третьих — в идеале, оно должно быть отделено от возбуждённых состояний энергетической щелью[3].
- Ну и наконец, важен порядок взятия пределов — сперва $T\to+\infty$, а затем $\epsilon\to+0$.

[1] Обычно это так, но это может нарушаться в системах со *спонтанно нарушенной симметрией*, где основное состояние имеет значительное вырождение

[2] Это условие может нарушается в задачах, к которым и невозможно подступиться с позиции теории возмущений — задачам, в которых основное состояние значительно перестраивается. В качестве примера можно привести электроны в металле со слабым притяжением — как известно, это приводит к сверхпроводимости.

[3] В теории Клейна-Гордона это так — поскольку элементарные возбуждения массивны, и имеется щель $\Delta = m$; но это нарушается в квантовой электродинамике, где имеются фотоны со сколь угодно низкой энергией. Это требование не является строгим, и для КЭД теория возмущений работает, но порой она страдает от наличия инфракрасных расходимостей, связанных ровно с существованием таких фотонов.

Получаем:

$$|\Omega\rangle = \frac{e^{-i\hat{H}T(1-i\epsilon)}\,|0\rangle}{e^{-iE_\Omega T(1-i\epsilon)}\,\langle 0|\Omega\rangle}, \quad \langle\Omega| = \frac{\langle 0|\, e^{-i\hat{H}T(1-i\epsilon)}}{e^{-iE_\Omega T(1-i\epsilon)}\,\langle\Omega|0\rangle} \tag{4}$$

И для произвольной корреляционной функции имеем (мы запомним, что у T есть маленькая мнимая часть, и дальше будем её опускать, ровно как и взятие пределов)

$$\langle\Omega|\,\hat{O}_1(t_1)\hat{O}_2(t_2)\ldots\hat{O}_N(t_N)\,|\Omega\rangle = \frac{\langle 0|\, e^{-i\hat{H}T}\hat{O}_1(t_1)\ldots\hat{O}_N(t_N)e^{-i\hat{H}T}\,|0\rangle}{e^{-2iE_\Omega T}\,|\langle\Omega|0\rangle|^2} \tag{5}$$

Наконец, знаменатель можно переписать из тривиального условия $\langle\Omega|\,1\,|\Omega\rangle = 1$:

$$e^{-2iE_\Omega T}\,|\langle\Omega|0\rangle|^2 = \langle 0|\, e^{-2i\hat{H}T}\,|0\rangle \tag{6}$$

Расписывая явно Шрёдингеровскую зависимость операторов от времён, мы получаем следующую формулу:

$$\boxed{\langle\Omega|\,\hat{O}_1(t_1)\hat{O}_2(t_2)\ldots\hat{O}_N(t_N)\,|\Omega\rangle = \frac{\langle 0|\,\hat{U}(T,t_1)\hat{O}_1\hat{U}(t_1,t_2)\ldots\hat{U}(t_{N-1},t_N)\hat{O}_N\hat{U}(t_N,-T)\,|0\rangle}{\langle 0|\,\hat{U}(T,-T)\,|0\rangle}} \tag{7}$$

Она хороша тем, что *вакуумные* средние мы уже умеем считать — для них работает теорема Вика, и основываясь на этом выражении мы можем построить теорию возмущений.

Адиабатическое включение взаимодействия Теперь рассмотрим альтернативный трюк, который также позволяет получать основное состояние гамильтониана. Заключается он в следующем: давайте в момент времени $-T$ стартуем с невзаимодействующей системы, описываемой гамильтонианом $\hat{H}_0$, а затем «включим» взаимодействие *адиабатически* — условно, введём руками зависимость в гамильтониан от времени вида $\hat{V}(t<0) = e^{\gamma t}\hat{V}$, с достаточно малой γ. В результате адиабатической теоремы система будет следовать мгновенным состояниям гамильтониана и в результате она окажется в основном состоянии взаимодействующей теории. Заметим также, что этот метод страдает от тех же недугов, а именно — основное состояние должно быть невырождено, и было бы хорошо, чтобы в спектре была щель (в таком случае адиабатичность означает что γ должна быть меньше щели в спектре). В таком случае мы получим попросту следующее:

$$|\Omega\rangle = \hat{U}(0,-T)\,|0\rangle \tag{8}$$

Это приводит нас к следующей формуле:

$$\langle\Omega|\,\hat{O}_1(t_1)\hat{O}_2(t_2)\ldots\hat{O}_N(t_N)\,|\Omega\rangle = \langle 0|\,\hat{U}(-T,t_1)\hat{O}_1(t_1)\hat{O}_2(t_2)\ldots\hat{O}_N(t_N)\hat{U}(0,-T)\,|0\rangle \tag{9}$$

(эволюция тем самым тут происходит по замкнутому временному контуру — читая справа налево, мы получаем $-T \to t_N \to \cdots \to t_1 \to -T$)[4]. Для того, чтобы продвинуться далее, мы перепишем первый оператор эволюции в виде $\hat{U}(-T,t_1) = \hat{U}(-T,T)\hat{U}(T,t_1)$. Если в момент времени $T \to +\infty$ взаимодействие также адиабатически выключить, то полная эволюция $\hat{U}(T,-T)\,|0\rangle$ приведёт нас обратно в вакуум, с точностью до какой-то фазы (которая, как мы помним из адиабатики, состоит из *динамического вклада* — $\int E(t)dt \approx E_\Omega \cdot 2T$ — и фазы Берри):

$$\hat{U}(T,-T)\,|0\rangle \simeq e^{i\Phi}\,|0\rangle \tag{10}$$

Это позволяет нам записать цепочку равенств:

$$\begin{aligned}\langle\Omega|\,\hat{O}_1(t_1)\hat{O}_2(t_2)\ldots\hat{O}_N(t_N)\,|\Omega\rangle &= \langle 0|\,\hat{U}(-T,T)\hat{U}(T,t_1)\hat{O}_1(t_1)\hat{O}_2(t_2)\ldots\hat{O}_N(t_N)\hat{U}(0,-T)\,|0\rangle = \\ &= e^{-i\Phi}\,\langle 0|\,\hat{U}(T,t_1)\hat{O}_1(t_1)\hat{O}_2(t_2)\ldots\hat{O}_N(t_N)\hat{U}(0,-T)\,|0\rangle = \frac{\langle 0|\,\hat{U}(T,t_1)\hat{O}\hat{U}(t_1,t_2)\ldots\hat{U}(t_{N-1},t_N)\hat{O}\hat{U}(t_N,-T)\,|0\rangle}{\langle 0|\,\hat{U}(T,-T)\,|0\rangle}\end{aligned} \tag{11}$$

что в конечном итоге снова приводит нас к тому же выражению, что и предыдущий трюк.

[4]Это выражение обладает большей универсальностью, чем описанное в предыдущем параграфе. В частности, оно не использует независимость гамильтониана от времени — более того, такая временная зависимость важна для вывода этого выражения — и позволяет изучать неравновесные ситуации. На основе этого выражения строится диаграммная техника Келдыша.

Представление взаимодействия

Собственно, дальнейшее построение прямолинейно. От представления Шрёдингера мы перейдём к представлению взаимодействия, где эволюция операторов происходит с помощью оператора $\hat{U}_0(t_2, t_1) = e^{-i\hat{H}_0(t_2-t_1)}$ (с невозмущённым гамильтонианом $\hat{H}_0$), а эволюция волновых функций — с оператором эволюции в представлении взаимодействия $\hat{S}(t_2, t_1) = \hat{U}_0(t_1, t_2)\hat{U}(t_2, t_1)$. Что важно, что при этом эволюция всех операторов будет точно такой же, как мы считали ранее — в этом смысле ничего не изменилось; для оператора эволюции в представлении взаимодействия работает следующая формула:

$$\hat{S}(t_2, t_1) = \hat{\mathcal{T}}\left\{\exp\left(-i\int_{t_1}^{t_2}\hat{V}(\tau)d\tau\right)\right\} \tag{12}$$

(и при этом оператор возмущения сам берётся в представлении взаимодействия, так что даже если он исходно от времени не зависел — то теперь будет). Наконец, для произвольной корреляционной функции мы тоже можем перейти к представлению взаимодействия и записать:

$$\langle\Omega|\,\hat{O}_1(t_1)\hat{O}_2(t_2)\ldots\hat{O}_N(t_N)\,|\Omega\rangle = \frac{\langle 0|\,\hat{S}(T, t_1)\hat{O}_1(t_1)\hat{S}(t_1, t_2)\ldots\hat{S}(t_{N-1}, t_N)\hat{O}_N(t_N)\hat{S}(t_N, -T)\,|0\rangle}{\langle 0|\,\hat{S}(T, -T)\,|0\rangle} \tag{13}$$

Если же операторы при этом сами $\mathcal{T}$-упорядочены, так что $t_1 > t_2 > \cdots > t_N$, то мы можем вставить общий знак $\mathcal{T}$-упорядочения в правой части; поскольку под $\mathcal{T}$-упорядочением операторы можно переставлять, то для таких корреляторов мы приходим к следующей формуле:

$$\boxed{\langle\Omega|\,\hat{\mathcal{T}}\left\{\hat{O}_1(t_1)\hat{O}_2(t_2)\ldots\hat{O}_N(t_N)\right\}|\Omega\rangle = \frac{\langle 0|\,\hat{\mathcal{T}}\{\hat{O}_1(t_1)\ldots\hat{O}_N(t_N)\hat{S}\}\,|0\rangle}{\langle 0|\,\hat{S}\,|0\rangle}, \quad \hat{S} \equiv \hat{S}(T, -T)} \tag{14}$$

Раскладывая выражение для оператора эволюции в представлении взаимодействия $\hat{S}$ в ряд, мы будем строить теорию возмущений.

Фейнмановские диаграммы для пропагатора теории ϕ^4

Диаграммная техника естественным образом возникает при разложении $\hat{S}$-матрицы в ряд по степеням возмущения и дальнейшем применении теоремы Вика. Здесь и далее символ $\mathcal{T}$-упорядочения будет подразумеваться, но опускаться. Подробное обсуждения вывода правил Фейнмана для теории ϕ^4 можно найти в книжке Пёскина, Шрёдера, глава 4.4 (диаграммы Фейнмана), и переизлагать содержимое этой главы тут бессмысленно. Изложим лишь главные основные результаты для Фейнмановской функции Грина (впрочем, они тривиально обобщаются и на старшие корреляторы).

Правила Фейнмана в координатном представлении

Каждая диаграмма ставится в соответствие некоторому набору Виковских свёрток, и диаграмме ставится в соответствие некоторое аналитическое выражение, представляющее собой вклад в ряд теории возмущений, скажем, для пропагатора:

1. В n-том порядке теории возмущений картинка должна содержать ровно *n вершин взаимодейсвия* — точек пространства $z_1, \ldots, z_N$, из которых торчит по 4 «хвоста» (они берутся из вида оператора взаимодействия $\hat{V} = \frac{\lambda}{4!}\int\phi^4(x)d^3\boldsymbol{x}$. Каждой такой вершине нужно поставить в соответствие интеграл $(-i\lambda)\cdot\int d^4z_i$.

2. Помимо этого, имеются две дополнительные точки — *внешние концы* x и y. По ним интегрирование не производится.

3. На картинке необходимо провести *спаривание* каким-то способом — соединить свободные концы. По всем возможным *топологически неэквивалентным спариваниям* нужно просуммировать.

4. Соединению точек z_i и z_j (включая внешние концы) ставится в соответствие Фейнмановский пропагатор — $D_F^{(0)}(z_i - z_j)$.

5. Полученное выражение необходимо поделить на *симметрийный фактор диаграммы.*

Сокращение вакуумных пузырей

Оказывается, что учитывать нужно только *связные* диаграммы — диаграммы, все вершины которых связаны (возможно, посредством нескольких связей) с одним из внешних концов. Имеет место следующее тождество, которое носит название *экспоненциированием вакуумных пузырей*:

$$\langle 0|\,\phi(x)\phi(y)\hat{S}\,|0\rangle = \sum(\text{все диаграммы}) = \sum(\text{все связные диаграммы}) \times \exp\left(\sum(\text{вакуумные пузыри})\right) \tag{15}$$

При этом знаменатель устроен так же, но нет вклада в связные диаграммы, то для знаменателя имеем:

$$\langle 0|\,\hat{S}\,|0\rangle = \exp\left(\sum(\text{вакуумные пузыри})\right) \tag{16}$$

В частности, поскольку, как мы выяснили ранее, $\langle 0|\,\hat{S}\,|0\rangle = |\langle 0|\Omega\rangle|^2 \exp(-iE_\Omega 2T)$, то сумма вакуумных пузырей (а каждый вакуумный пузырь пропорционален четырёхмерному объёму системы $V_4 = V \cdot 2T$!) даёт попросту энергию основного состояния (отсчитанную от энергии невозмущённой системы, поскольку мы работаем в представлении взаимодействия):

$$\boxed{\epsilon_\Omega = \frac{E_\Omega}{V_3} = -\frac{1}{V_4}\mathrm{Im}\sum(\text{вакуумные пузыри})} \tag{17}$$

Так или иначе, вакуумные пузыри сокращаются, и для пропагатора необходимо учитывать только связные диаграммы:

$$D_F(x-y) = \langle\Omega|\,\phi(x)\phi(y)\,|\Omega\rangle = \sum(\text{все связные диаграммы}) \tag{18}$$

Уравнение Дайсона

На диаграммном языке можно продвинуться ещё чуть дальше, добавив дополнительную классификацию диаграмм. Назовём диаграмму *одночастично неприводимой*, если она не распадается при разрезании какой-либо одной линии на несвязные куски. Назовём *собственной энергетической частью* $\Sigma(x-y)$ следующий ряд (включим «$-i$» в определение, смысл которой будет ясен ниже):

$$-i\Sigma(x-y) = \sum(\text{одночастично неприводимые диаграммы с ампутированными концами}) \tag{19}$$

(под «ампутированными концами» имеется в виду, что к ним нужно дорисовать какие-то функции Грина, которые исключаются из самого выражения для Σ). В таком случае, диаграммный ряд для пропагатора представляется в следующем операторном виде (то есть везде подразумеваются свёртки):

$$\boxed{\hat{D}_F = \hat{D}_F^{(0)} + \hat{D}_F^{(0)}(-i\hat{\Sigma})\hat{D}_F^{(0)} + \hat{D}_F^{(0)}(-i\hat{\Sigma})\hat{D}_F^{(0)}(-i\hat{\Sigma})\hat{D}_F^{(0)} + \cdots \equiv \hat{D}_F^{(0)} + \hat{D}_F^{(0)}(-i\hat{\Sigma})\hat{D}_F} \tag{20}$$

или, в координатной форме:

$$D_F(x-y) = D_F^{(0)}(x-y) + \int d^4z_1 d^4z_2 D_F^{(0)}(x-z_1)(-i\Sigma(z_1-z_2))D_F(z_2-y) \tag{21}$$

Это интегральное уравнение, из которого определяется $D_F(x-y)$, носит название *уравнения Дайсона*. В действительности необходимо строить теорию возмущений именно для собственной энергетической части Σ.

Преобразование Фурье и правила Фейнмана в импульсном представлении

Правила Фейнмана прекрасно переписываются, используя преобразование Фурье — вместо пропагаторов необходимо подставить их преобразования Фурье, и провести некоторые вычисления. Сводится всё к следующему набору правил:

1. На диаграмме Фейнмана каждой линии нужно поставить в соответствие четыре-импульс p_i (и направление, вдоль которого этот импульс «бежит»). В вершинах необходимо учесть закон сохранения четыре-импульса (сумма импульсов с учётом направлений равна нулю) — из-за чего не все импульсы оказываются *независимы*. Помимо этого, имеются внешние концы, через которые в диаграмму «входит» и «выходит» внешний импульс p.

2. Каждой вершине нужно поставить в соответствие $-i\lambda$.

3. Каждому пропагатору, по которому «бежит» импульс p_i ставится в соответствие $D_F^{(0)}(p_i) = \frac{i}{p_i^2 - m^2 + i0}$.

4. По всем незакреплённым законами сохранения импульсам происходит интегрирование $\int \frac{d^4p_i}{(2\pi)^4}$.

5. И опять диаграмму необходимо разделить на её симметрийный фактор.

Используя преобразование Фурье, уравнение Дайсона тривиально решается:

$$D_F(p) = D_F^{(0)}(p) + D_F^{(0)}(p)(-i\Sigma(p))D_F(p) \Rightarrow D_F(p) = \frac{i}{i(D_F^{(0)}(p))^{-1} - \Sigma(p)} = \frac{i}{p^2 - m^2 - \Sigma(p)} \tag{22}$$

Из такого представления видно, что собственная энергетическая часть отвечает за различные перенормировки спектра одночастичных возбуждений — например, $\Sigma(p=0)$ представляет собой перенормировку массы.

Заключение

В заключение хочется отметить, что большинство сделанных тут утверждений носит совершенно общий характер. В частности, экспоненциирование и сокращение вакуумных пузырей носит такой же вид в произвольной теории поля; ровно как и сами правила Фейнмана, классификация диаграмм по одночастичной приводимости и уравнение Дайсона. Единственное, что меняется от одной теории поля к другой — это вид *вершин взаимодейсвия* и *пропагаторов*. В частности, для электрон-фононного взаимодействия необходимо было бы вводить линии двух типов — электронные линии (у которых, к слову, концы неэквивалентны, поскольку пропагатор имеет вид $G(x-y)=\left\langle\hat{\psi}(x)\hat{\psi}^\dagger(y)\right\rangle$ — из-за чего на них необходимо рисовать стрелки[5]) и фононные линии, а вершины взаимодействия содержат два «электронных» хвоста (соответствующих $\psi^\dagger(x)\psi(x)$) и один фононный (соответствующий $\mathrm{div}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r})$).

[5] Разные авторы рисуют стрелки по-разному. Например, в книге Абрикосова, Горькова и Дзялошинского, а также у Левитова и Шитова, стрелка в пропагаторе $\left\langle\hat{\psi}(x)\hat{\psi}^\dagger(y)\right\rangle$ направлена от точки x (где стоит оператор уничтожения) к точке y (где стоит оператор рождения). У Ландау и Лифшица в «физической кинетике» — наоборот, стрелки рисуют от точки y к точке x — что, возможно, идеологически более правильно, поскольку частица рождается в точке y, оттуда «летит» к точке x и там уничтожается.