Задачи к лекции «Интеграл по траекториям в многочастичной квантовой механике»

Упражнения (35 баллов)

Упражнение 1. Грассмановы числа (5 баллов)

Вычислите явно Гауссов интеграл по грассмановым числам для произвольной матрицы 2×2.

Упражнение 2. Когерентные состояния (10 баллов)

Пусть $\hat{O}$ — какой-то произвольный вторично-квантованный оператор. Используя когерентные состояния, выразите $\mathrm{Tr}(\hat{O})$ через интеграл по когерентным состояниям, для бозонного и фермионного случая.

Упражнение 3. Преобразование Боголюбова (10 баллов)

Пусть есть пара состояний, описываемых лестничными операторами $\{\hat{a}_1, \hat{a}_1^\dagger\}$ и $\{\hat{a}_2, \hat{a}_2^\dagger\}$. Рассмотрите линейные преобразования вида:

$$\hat{B} = U\hat{A}, \quad U = \begin{pmatrix} u & v \\ v' & u' \end{pmatrix}, \quad \hat{A} = \begin{pmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2^\dagger \end{pmatrix}, \quad \hat{B} = \begin{pmatrix} \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2^\dagger \end{pmatrix} \tag{1}$$

1. При каком условии на матрицу U (на числа u, v, u', v') такое преобразование, носящее название преобразования Боголюбова, является каноническим — сохраняет коммутационные соотношения? Рассмотрите бозонный и фермионный случай.

2. Рассмотрите преобразования Боголюбова с вещественными коэффициентами. Покажите, что матрицу U можно явно параметризовать в терминах тригонометрических функций sin, cos (для фермионов) и sinh, cosh (для бозонов).

Упражнение 4 (10 баллов)

Используя преобразование Боголюбова, диагонализуйте следующий гамильтониан:

$$\hat{H} = \omega(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 + \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2) + \Delta(\hat{a}_1 \hat{a}_2 + \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_1^\dagger), \quad \omega > \Delta \tag{2}$$

Рассмотрите бозонный и фермионный случай.

Задача. Слабонеидеальный Бозе-газ (65 баллов)

В данной задаче мы будем рассматривать слабонеидеальный Бозе-газ, описываемый следующим гамильтонианом (в рамках большого канонического ансамбля с химическим потенциалом μ):

$$\hat{H}' \equiv \hat{H} - \mu\hat{N} = \int dx \left(\frac{\nabla\hat{\Psi}^\dagger \nabla\hat{\Psi}}{2m} - \mu\hat{\Psi}^\dagger\hat{\Psi} + \frac{g}{2}\hat{\Psi}^\dagger\hat{\Psi}^\dagger\hat{\Psi}\hat{\Psi} \right) \tag{3}$$

1. Используя формализм фукционального интеграла, найдите «седло», соответствующее спонтанному нарушению $U(1)$ симметрии — «конденсатное» решение $\psi_0(\boldsymbol{x})$. Для простоты можете выбрать его вещественным.

2. Квадратичные флуктуации в окрестности этого «седла» соответствует квазичастицам — они соответствуют элементарным возбуждениям системы. Чтобы их найти, предлагается использовать формализм вторичного квантования; для этого рассмотрите каноническое преобразование полевых операторов $\hat{\Psi}(\boldsymbol{x}) = \psi_0(\boldsymbol{x}) + \hat{\psi}(\boldsymbol{x})$, после чего гамильтониан $\hat{H}'$ разложите до квадратичного порядка по $\hat{\psi}(\boldsymbol{x})$.

3. **(20 баллов)** Для диагонализации полученного гамильтониана первым шагом стандартным образом перейдите к преобразованию Фурье $\hat{\psi}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\boldsymbol{k}} \hat{a}_{\boldsymbol{k}} e^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{x}}$. После такой подстановки, в гамильтониане должны возникнуть «аномальные» члены, не сохраняющие число частиц — вида $\hat{a}_{\boldsymbol{k}}\hat{a}_{-\boldsymbol{k}}$.

4. **(20 баллов)** Используя преобразование Боголюбова (см. упражнение) вида $\hat{a}_{\boldsymbol{k}} = u_{\boldsymbol{k}}\hat{b}_{\boldsymbol{k}} + v_{\boldsymbol{k}}\hat{b}^{\dagger}_{-\boldsymbol{k}}$, диагонализуйте полученный гамильтониан, приведя его к виду $\hat{H} = \sum_{\boldsymbol{p}} \xi_{\boldsymbol{p}} \hat{b}^{\dagger}_{\boldsymbol{p}} \hat{b}_{\boldsymbol{p}} + \text{const}$. Найдите спектр квазичастичных возбуждений $\xi_{\boldsymbol{p}}$.

5. **(25 баллов)** Вычислите среднее число надконденсатных частиц $N_1 = \left\langle \hat{N}_1 \right\rangle = \int d\boldsymbol{x} \left\langle \hat{\psi}^{\dagger}(\boldsymbol{x})\hat{\psi}(\boldsymbol{x}) \right\rangle$. В процессе решения мы предполагали, что практически все частицы находятся в конденсате, поэтому построенная тут теория работает только если $N_1 \ll N$. Для выяснения физического смысла полученного критерия, удобно параметризовать константу связи g через длину рассеяния a согласно[1] $g = \frac{4\pi a}{m}$.

[1]Длина рассеяния — это характеристика задачи рассеяния. Она определяется как амплитуда рассеяния медленных частиц в s-канале — $f(\theta) \approx f_{l=0} = -a$ $(E \to 0)$; и через неё выражается сечение рассеяния согласно $\sigma = 4\pi a^2$. Стоит только отметить, что в данном случае мы имеем дело с рассеянием тождественных частиц, из-за чего некоторые стандартные формулы из задачи рассеяния требуют модификации.