Задачи к лекции «Вторичное квантование теории Клейна-Гордона»

Задача 1. Матрац (30 баллов)

В этой задаче мы рассмотрим один из способов, как в физике возникает теория поля в качестве непрерывного предела некой иной теории. Рассмотрите одномерную цепочку из N атомов с периодическими граничными условиями, в гармоническом приближении («связанных пружинами»), описываемую следующим гамильтонианом:

$$\hat{H} = \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{\hat{p}_n^2}{2m} + \frac{m\omega^2(\hat{u}_n - \hat{u}_{n+1})^2}{2} \right), \quad \hat{u}_{N+1} \equiv \hat{u}_1$$

В положении равновесия расстояния между частицами равно a, так что $x_n = na$; величины же u_n описывают отклонение n-того атома из положения равновесия.

1. Используя дискретное преобразование Фурье, перейдите к новым переменным — Фурье-компонентам u_k и p_k. Запишите в терминах этих переменных гамильтониан, а также выпишите коммутационные соотношения между ними.

2. Постройте их линейные комбинации, которые удовлетворяют стандартной лестничной алгебре, и в терминах которых гамильтониан имеет диагональный вид (представляет собой сумму независимых осцилляторов). Получите закон дисперсии квазичастиц в этой теории — фононов.

3. Теперь наша задача — построить непрерывный предел $N \to \infty$, считая длину цепочки $L = Na$ фиксированной. Переменные $\hat{p}_n$ и $\hat{u}_n$ при этом должны превратиться в непрерывные поля. Имеются два способа построить этот предел:

   (a) Введите $\hat{\pi}(x = na) = \#\hat{p}_n$ и $\hat{\phi}(x = na) = \#\hat{u}_n$, так чтобы в пределе $N \to \infty$ выполнялось «правильные» полевые коммутационные соотношения $[\hat{\phi}(x), \hat{\pi}(x')] = i\delta(x - x')$. Подставьте эти поля в гамильтониан и упростите, разложив в ряд Тейлора по a.

   (b) Альтернативно, можно разложить по $ka \ll 1$ закон дисперсии, а поля выразить через лестничные операторы так, чтобы в точках $x = na$ они с точностью до константы, опять-таки, совпали с исходными переменными; и удовлетворяли правильным коммутационным соотношениям (это стандартный способ построить интерполяцию функции по точкам, используя преобразование Фурье). Сделав затем подстановку в гамильтониан, выраженный через лестничные операторы, вы в конечном итоге тоже получите правильный полевой гамильтониан.

4. Обратите внимание, что для того, чтобы непрерывный предел был хорошо определён, нужно определённым образом менять с N значения m и ω. Покажите, что хорошо определёнными являются термодинамические величины — *линейная плотность массы* ρ, и *скорость звука* c. Как они связаны с *микроскопическими параметрами* m, ω, a?

5. Обсудите, как полученные результаты связать со словами про ультрафиолетовые расходимостями в теориях поля, сказанными на лекции. Какова энергия вакуума этой теории?

Литература ЛШ, задача 4; Зи, глава 1.3.

Задача 2. Теория с зарядом (30 баллов)

Продолжим рассмотрение комплексной теории Клейна-Гордона в размерности 3+1. Гамильтониан этой теории имеет следующий вид:

$$\hat{H} = \int d^3\boldsymbol{x} (\hat{\pi}^\dagger \hat{\pi} + \nabla\hat{\phi}^\dagger \nabla\hat{\phi} + m^2 \hat{\phi}^\dagger \hat{\phi})$$

1. Не помещая систему в «ящик» (так что k-пространство не дискретно, и необходимо использовать непрерывное преобразование Фурье), проквантуйте эту теорию, перейдя к операторам рождения и уничтожения. В случае непрерывного k-пространства, коммутационные соотношения должны иметь вид $[\hat{a}_{\boldsymbol{p}}, \hat{a}_{\boldsymbol{q}}^\dagger] = (2\pi)^3\delta^{(3)}(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{q})$. Обратите внимание, что, в отличии от вещественного случая, условия $\phi = \phi^\dagger$ нет; это удваивает количество степеней свободы теории, и вам необходимо будет ввести два набора операторов $\hat{a}_{\boldsymbol{p}}$ и $\hat{b}_{\boldsymbol{p}}$, в терминах которых гамильтониан должен иметь по-прежнему диагональный вид.

2. Используя теорему Нётер, выпишите выражение для сохраняющегося импульса поля $\boldsymbol{P}$ (не путать с каноническим импульсом $\hat{\pi}$!). Выразите его через лестничные операторы. Какой импульс несут частицы $\hat{a}_{\boldsymbol{p}}$ и $\hat{b}_{\boldsymbol{p}}$?

3. Поступите аналогично с зарядом, который соответствует симметрии по отношению к $U(1)$ фазовым вращениям. Какие заряды у частиц $\hat{a}_{\boldsymbol{p}}$ и $\hat{b}_{\boldsymbol{p}}$? Проинтерпретируйте полученные результаты в терминах частиц и античастиц.

Литература ПШ, глава 2 и задача 2.2.

Упражнения (10 баллов)

Данные упражнения относятся к комплексной теории Клейна-Гордона из предыдущей задачи; тут мы на время «забываем» о наличии в задаче античастиц.

1. Определим одночастичное состояние с импульсом $\boldsymbol{p}$ как $|\boldsymbol{p}\rangle = \sqrt{2E_{\boldsymbol{p}}}\hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{p}}|0\rangle$. Вычислите матричный элемент $\langle 0|\hat{\phi}(x)|\boldsymbol{p}\rangle$.

2. Какова нормировка таких состояний: $\langle \boldsymbol{p}|\boldsymbol{p}'\rangle$ (обратите внимание, что она является Лоренц-инвариантной, с чем и связан выбор множителя $\sqrt{2E_{\boldsymbol{p}}}$)? Как записать через эти состояния проектор на одночастичное подпространство $\hat{\mathbb{I}}_{\text{одноч.}}$?

3. Используя только коммутационные соотношения, покажите явно, что многочастичное состояние $|\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \ldots, \boldsymbol{p}_n\rangle$ (определённое согласно п.2) является собственным для гамильтониана $\hat{H}$. Какое собственное число соответствует этому состоянию?

Задача 3. Эффект Казимира (30 баллов)

Не смотря на то, что в теории Клейна-Гордона энергия вакуума ультрафиолетово расходится, тем не менее с ней связан наблюдаемый (и вычисляемый в рамках теории) результат — а именно, эффект Казимира. Сам эффект проявляется в взаимном притяжении двух пластин, помещённых в вакуум на конечном расстоянии l друг от друга.

1. Рассмотрите безмассовую $m = 0$ теорию Клейна-Гордона в пространстве размерности $d + 1$; при этом предположите, что система находится между парой параллельных пластин, находящихся на расстоянии l друг от друга, и на которых поле зануляется. Используя периодические граничные условия вдоль остальных направлений, получите выражение для энергии нулевых колебаний такой системы $E(l)$. Обратите внимание, что это выражение ультрафиолетово расходится.

2. Теперь рассмотрите большую систему размера $L_1 \times L_2 \times \ldots \times L_d$, в которую внесли пару непроницаемых плоскостей, перпендикулярных пространственной оси d, и расстояние между которыми равно $l \ll L_d$. Поле теперь, вообще говоря, может находиться как между плоскостями, так и снаружи, поэтому энергия такой системы будет равна $E(l) + E(L_d - l)$. Поскольку энергия системы явно зависит от l, то между плоскостями будет иметь место взаимодействие с конечной силой $F = \frac{\partial}{\partial l}(E(l) + E(L_d - l))$. Поскольку сила окажется пропорциональной поперечной площади сечения $A = L_1 \times \ldots \times L_{d-1}$, то осмысленной величиной является давление $P = \frac{F}{A}$, которое пластины оказывают друг на друга. Это давление уже не расходится ультрафиолетово и его оказывается возможным вычислить в рамках теории. Получите выражение для давления.

3. Рассмотрите случай $d = 1$, используя экспоненциальную регуляризацию — а именно, вводя во все ультрафиолетово расходящиеся величины множитель $\exp(-|p|/\Lambda)$. Вычислите явно величину $E(l)$, а также давление P. Покажите, что последнее остаётся конечным в пределе $\Lambda \to \infty$.

4*. **(10 баллов)** Используя *размерную регуляризацию*, вычислите величину $E(l)$ и F в пространстве произвольной размерности d. В частности, вычислите её при $d = 1, 2, 3$.

5**. **(для любителей, 50 баллов)** Исследуйте эффект Казимира для массивного поля $m \neq 0$, считая при этом $ml \gg 1$.

В трёхмерье вы должны получить ответ в два раза меньший, чем изложенный в Википедии. Это связано с тем, что в нашем мире эффект Казимира вызван энергией вакуума электромагнитного поля, которое вовсе не описывается теорией Клейна-Гордона. В частности, у фотонов имеются две допустимых *поляризации* — то есть в два раза больше степеней свободы.

Литература Зи, глава 1.8, «Эффект Казимира».