

Задачи к лекции «Фононы»

Упражнения (25 баллов)

Упражнение 1. Теория Клейна-Гордона (10 баллов)

Покажите, что теорию, описывающую только продольные фононы, можно описать в терминах скалярного поля $\varphi(\mathbf{r})$, которое определяется через Фурье как $\varphi_{\mathbf{k}} = (\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_{\mathbf{k}})/|\mathbf{k}|$. Покажите, что теория поля, описывающая поле $\varphi(\mathbf{r})$, с точностью до обозначений совпадает с безмассовой теорией Клейна-Гордона, со скоростью света заменённой на скорость продольного звука $c \equiv c_l$:

$$\hat{H}_{\text{ph}} = \frac{\rho}{2} \int d\mathbf{r} [\hat{\pi}^2 + c^2(\nabla\hat{\varphi})^2] \quad (1)$$

Упражнение 2. Анггармонизм (15 баллов)

При выводе гамильтониана фононов мы раскладывались по малости отклонения атомов от положения равновесия, $\mathbf{u}(\mathbf{r})$. Учёт подобных эффектов приведёт к появлению нелинейных членов в гамильтониане — членов вида $\lambda \int d\mathbf{r} \hat{\varphi}^3$ (и старших). В таком случае, фононы — состояния $|\mathbf{k}\rangle = \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger |0\rangle$ — уже не являются собственными состояниями гамильтониана, а имеют конечное время жизни. Убедитесь, что если закон дисперсии имеет отрицательную кривизну¹, $\omega_{\mathbf{k}} \simeq ck - \alpha k^3$ (предполагая α малым параметром), то время жизни, вычисленное по золотому правилу Ферми, оказывается бесконечным чисто из кинематических соображений².

Задачи (75 баллов)

Задача 1. Время жизни фонона (35 баллов)

Рассмотрите модель трёхмерного металла, описывающую электроны, взаимодействующие с фононами:

$$\hat{H} = \int d\mathbf{r} \left[\hat{\psi}^\dagger \left(-\frac{1}{2m} \Delta - \mu \right) \hat{\psi} + \frac{\rho}{2} (\hat{\pi}^2 + c^2(\nabla\hat{\varphi})^2) + \frac{gn}{\nu} \hat{\psi}^\dagger \hat{\psi} (|\nabla\hat{\varphi}|) \right] = \sum_{\mathbf{p}} \epsilon_{\mathbf{p}} \hat{c}_{\mathbf{p}}^\dagger \hat{c}_{\mathbf{p}} + \sum_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}} + \hat{H}_{\text{e-ph}}$$

$$\epsilon_{\mathbf{p}} = \frac{p^2}{2m} - \mu, \quad \omega_{\mathbf{k}} = c|\mathbf{k}|, \quad [\hat{a}_{\mathbf{p}}, \hat{a}_{\mathbf{q}}^\dagger] = \{\hat{c}_{\mathbf{p}}, \hat{c}_{\mathbf{q}}^\dagger\} = \delta_{\mathbf{p}\mathbf{q}}$$

(оператор $|\nabla|$ действует в Фурье-пространстве как домножение на $i|\mathbf{k}|$). Концентрация электронов равна n . Вычислите время жизни фонона с частотой ω в такой системе — волновая функция которой представляет собой произведение волновой электронной системы $|\Omega\rangle$ (заполненная Ферми-сфера) и фононного вакуума $|0\rangle$.

1. Предлагается использовать золотое правило Ферми, используя $\hat{H}_{\text{e-ph}}$ как возмущение. Начальное состояние содержит фонон импульсом $\mathbf{k}$: $|i\rangle = \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger |0\rangle$. Конечное состояние содержит электрон-дырочную пару $|f\rangle = \hat{c}_{\mathbf{p}_1}^\dagger \hat{c}_{\mathbf{p}_2} | \Omega \rangle$ (при этом импульс электрона равен $\mathbf{p}_1$ и $|\mathbf{p}_1| > p_F$; а импульс дырки равен $-\mathbf{p}_2$ и $|\mathbf{p}_2| < p_F$). Покажите, что только такие матричные элементы отличны от нуля $H_{fi}^{\text{e-ph}} = \langle i | \hat{H}_{\text{e-ph}} | f \rangle \neq 0$. Вычислите матричный элемент; покажите, что он отличен от нуля при выполнении закона сохранения импульса $\mathbf{k} = \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2$.
2. Вычислите энергию начального состояния ϵ_i и конечного состояния ϵ_f .
3. Время жизни определяется скоростью переходов $w_{i \rightarrow f} = 2\pi \left| H_{if}^{(\text{e-ph})} \right|^2 \delta(\epsilon_i - \epsilon_f)$, просуммированному по всем конечным состояниям $\tau_i^{-1} = \sum_f w_{i \rightarrow f}$. Покажите, что у этого выражения имеется конечный предел бесконечного объема системы $V \rightarrow \infty$ (с заменой сумм по импульсам на интегралы).

¹В частности, ровно такую кривизну имеет спектр в модели атомов со взаимодействием между ближайшими соседями — $\omega_{\mathbf{k}} = \frac{2c}{a} \left| \sin \frac{ka}{2} \right| \sim ck - \frac{c}{24} k^3 a^2$

²Говорят, что такой спектр **нераспадный**

4. Чтобы разобраться с кинематикой рассеяния, удобно параметризовать конечные импульсы согласно $\mathbf{p}_{1,2} = \mathbf{p} \pm \frac{\mathbf{k}}{2}$, что автоматически удовлетворяет закону сохранения импульса. Энергию и импульс фонона нужно считать малыми, так что $\omega \ll E_F$ и $k \ll p_F$.
5. Выразите ответ через безразмерный параметр $\zeta = \frac{g^2 n^2}{\nu \rho c^2}$.

Литература Левитов и Шитов 2003, задача 31

Задача 2. Время жизни электрона (40 баллов)

В модели из предыдущей задачи, вычислите теперь «время жизни»³ электрона. Отличия от предыдущей задачи заключаются в следующем:

1. Начальное состояние содержит электрон с импульсом $p > p_F$: $|i\rangle = \hat{c}_{\mathbf{p}}^\dagger |0\rangle$ (при этом мы предполагаем возбуждение в окрестности поверхности Ферми, то есть $p - p_F \ll p_F$). Конечное состояние содержит фонон с импульсом $\mathbf{k}$ (который предполагается малым, $k \ll p_F$) и электрон с импульсом $\mathbf{p}'$: $|f\rangle = \hat{c}_{\mathbf{p}'}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger |0\rangle$. Проявите, что только такие матричные элементы взаимодействия отличны от нуля $H_{fi}^{\text{e-ph}} \neq 0$, а также что такой матричный элемент отличен от нуля только при выполнении закона сохранения импульса $\mathbf{p}' = \mathbf{p} - \mathbf{k}$, а также только при $p' > p_F$.
2. Для кинематики предлагается использовать следующее приближение. Поскольку импульс Ферми, а следовательно импульсы электронов очень велики (в частности, $k \ll p, p'$), то при учёте закона сохранения энергии предлагается использовать следующее приближение: $\varepsilon_{\mathbf{p}-\mathbf{k}} \approx \varepsilon_{\mathbf{p}} - \mathbf{k} \cdot \nabla_{\mathbf{p}} \varepsilon_{\mathbf{p}} = \varepsilon_{\mathbf{p}} - v_F k \cos \theta$, где $v_F = p_F/m \approx p/m$ — групповая скорость электронов в металле. С учётом этого, проинтегрируйте по конечным состояниям, которые параметризуются импульсом фонона $\mathbf{k}$, и вычислите время жизни.
3. Выразите ответ через безразмерный параметр ζ , а также через энергию электрона (отсчитанную от энергии Ферми) $\xi = \varepsilon_{\mathbf{p}} - \varepsilon_F \approx v_F(p - p_F)$, и оцените его, используя оценку для энергии Дебая⁴ $\omega_D \sim c p_F$.

Литература Левитов и Шитов 2003, задача 28

Список литературы

Левитов, Л. и А. Шитов (2003). *Функции Грина. Задачи и решения*. ФИЗМАТЛИТ.

³Электрон никуда не девается, и в этом смысле терминология «времени жизни» не совсем корректна. Корректнее говорить о времени релаксации энергии, поскольку акт взаимодействия электрон с фононом неупругий и приводит к диссипации энергии.

⁴В металле, Ферми-импульс и Дебаевский волновой вектор, как правило, имеют порядок обратной постоянной решётки $p_F \sim k_D \sim 1/a$