Задачи к лекции «Диаграммная техника Фейнмана»

Упражнения (30 баллов)

В этих упражнениях рассматривается комплексная теория Клейна-Гордона с возмущением вида $|\phi|^4$:

$$S = \int d^4x \left(|\partial_\mu \phi|^2 - m^2|\phi|^2 - \frac{\lambda}{4}|\phi|^4 \right) \tag{1}$$

Мы будем исследовать Фейнмановский пропагатор для такой взаимодействующей теории:

$$D(x-y) = \langle\Omega|\,\hat{\mathcal{T}}\{\hat{\phi}(x)\hat{\phi}^\dagger(y)\}\,|\Omega\rangle = \frac{\left\langle \hat{\mathcal{T}}\left\{\hat{\phi}(x)\hat{\phi}^\dagger(y)\hat{S}\right\}\right\rangle_0}{\left\langle \hat{S} \right\rangle_0}, \quad \hat{S} = \hat{\mathcal{T}}\left\{ \exp\left(-i\frac{\lambda}{4}\int d^4z (\hat{\phi}^\dagger(z)\hat{\phi}(z))^2 \right) \right\} \tag{2}$$

Указание: при построении диаграммной техники, к каждой линии, которая обозначает функцию Грина, теперь нужно приписать также и направление — стрелочку от $\hat{\phi}$ к $\hat{\phi}^\dagger$.

Упражнение 1. Экспоненциирование связных диаграмм (15 баллов)

В этом упражнении все вычисления (включая промежуточные) необходимо проводить до второго порядка теории возмущений (выбрасывая члены $o(\lambda^3)$).

1. Разложите знаменатель $\left\langle \hat{S} \right\rangle_0$ в ряд.
2. Рассмотрите все Виковские спаривания для выписанных членов. Нарисуйте соответствующие им диаграммы, вычислите их симметрийные факторы. Выпишите соответствующие этим диаграммам аналитические выражения, обозначая невозмущённый пропагатор за $D_0(x-y)$.
3. Покажите, что каждая диаграмма с b вакуумными пузырями пропорциональна V_4^b, где $V_4 = V \cdot T$ — четырёхмерный объём системы (V — обычный, трёхмерный объем, а T — время наблюдения за ней).
4. Повторите пункты 1-3 для $\ln\left\langle \hat{S} \right\rangle_0$. Покажите непосредственным вычислением, что диаграммы с более чем одним вакуумным пузырём сокращаются, а полученный ответ пропорционален V_4.

Упражнение 2. Пропагатор (15 баллов)

1. Повторите пункты 1-3 предыдущего упражнения для числителя $\left\langle \hat{\mathcal{T}}\{\hat{\phi}(x)\hat{\phi}^\dagger(y)\hat{S}\} \right\rangle_0$.
2. Повторите пункт 4 для полного выражения для пропагатора $D(x-y)$. Продемонстрируйте, что вкладов, содержащих объём V_4 не остаётся вовсе.
3. Выпишите соответствующие выражения для собственной энергетической части $\Sigma(x-y)$ с точностью до членов $O(\lambda^2)$.
4. Покажите, что *приводимая* диаграмма $\sim O(\lambda^2)$ даёт выражение $\delta\hat{D}^{(2)} = \hat{D}_0\hat{\Sigma}_1\hat{D}_0\hat{\Sigma}_1\hat{D}_0$, где $\hat{\Sigma}_1$ — вклад в $\hat{\Sigma}$ порядка $O(\lambda)$; и что тем самым данная диаграмма корректно учитывается уравнением Дайсона.

Задачи (70 баллов)

Задача 1. Квантовый ангармонический осциллятор (40 баллов)

Квантовая механика может рассматриваться как частный случай квантовой теории поля в $0+1$ измерениях. В данной задаче мы применим методы квантовой теории поля для ангармонического осциллятора — аналога теории «фи-в-четвёртой» в $0+1$ измерениях. Рассмотрите квантовый гармонический осциллятор (см. задачу 1 предыдущего семинара) с возмущением $V_{int} = \frac{\mu}{3!}\phi^3 + \frac{\lambda}{4!}\phi^4$.

1. Выведите правила диаграммной техники для исследуемой теории.

2. Вычислите вакуумные пузыри, покажите, что они пропорциональны времени наблюдения за системой T и найдите поправки к энергии основного состояния $\Delta E_{n=0}$ в первом неисчезающем порядке по μ и λ — $O(\mu^2, \lambda)$.

3. Найдите собственную энергетическую часть $\Sigma(\omega)$ в том-же порядке теории возмущений.

4. Используя уравнение Дайсона, исследуйте, как сместится полюс функции Грина осциллятора $\langle\Omega|\,\hat{\mathcal{T}}\{\hat\phi(t)\hat\phi(t')\}\,|\Omega\rangle$. Функция Грина описывает *одночастичные возбуждения* системы, и поэтому полученное выражение в действительности определяет просто поправку к первому возбуждённому уровню осциллятора $\Delta E_{n=1}$.

5. Сравните все полученные ответы с известными из «обычной» теории возмущений.

Указание: все вычисления удобно производить во временном, а не частотном, представлении.

Задача 2. «Обычная» теория возмущений (30 баллов)

Рассмотрите одночастичную квантомеханическую задачу с каким-то гамильтонианом $\hat H = \hat H^{(0)} + \hat V$. Как обычно, полный набор собственных состояний невозмущенного гамильтониана $\hat H_0$ известен: $\hat H_0\,|n\rangle = E_n^{(0)}\,|n\rangle$; будем считать все собственные значения невырожденными. Резольвента, или функция Грина, для оператора $\hat H$ определяется стандартным образом как $\hat G(E) = (E - \hat H + i0)^{-1}$; невозмущенную функцию Грина мы будем называть $\hat G^{(0)}(E) = (E - \hat H_0 + i0)^{-1}$.

1. Постройте операторный ряд теории возмущений по $\hat V$ для величины $\hat G$. Соответствующее диаграммное представление членов этого ряда имеет следующий вид:

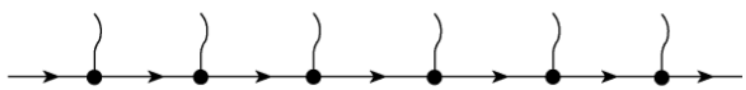

Рис. 1: Диаграммное представление произвольного элемента ряда теории возмущений для $\hat G$. Волнистой линии соответствуют операторы $\hat V$, а прямой — операторы $\hat G_0$.

2. В представлении собственных функций гамильтониана $\hat H_0$, невозмущённая функция Грина имеет диагональный вид:

$$\langle n|\,\hat G^{(0)}\,|m\rangle = G_n^{(0)}\delta_{nm}, \quad G_n^{(0)} = \frac{1}{E - E_n^{(0)} + i0} \tag{3}$$

Запишите ряд теории возмущений для величины $G_n \equiv \langle n|\,\hat G\,|n\rangle$, выразив его через различные $G_n^{(0)}$, а также матричые элементы V_{nm}. Покажите, что на графическом языке это соответствует следующим «правилам Фейнмана» — каждой линии мы ставим в соответствие число n_i, по которому происходит суммирование; сама линия соответствует $G_{n_i}^{(0)}$; а волнистая линия соответствует $V_{n_i n_j}$, где n_i соответствует левой линии, а n_j — правой.

3. Чтобы вывести «уравнение Дайсона», необходимо привести диаграммный ряд к «одночастично-неприводимому» ряду:

$$G_n = G_n^{(0)} + G_n^{(0)}\Sigma_n G_n^{(0)} + G_n^{(0)}\Sigma_n G_n^{(0)}\Sigma_n G_n^{(0)} + \ldots, \quad G_n = \frac{1}{G_n^{(0)-1} - \Sigma_n} = \frac{1}{E - E_n^{(0)} - \Sigma_n(E) + i0} \tag{4}$$

Для этого при суммировании во всех промежуточных состояниях нужно явно выделить член с $n_i = n$ (обозначим его на диаграммном языке линией с чёрточкой) и остальные, с $n_i \neq n$ (которые мы будем обозначать просто прямой линией). В таком случае, на графическом языке необходимо суммировать по всем диаграммам, которые имеют вид, изображённый на рисунке — но при этом каждая линия может быть как с чёрточкой, так и нет. В таком случае в «собственную энергию» Σ_n должны попросту войти все диаграммы «без чёрточек», что соответствует следующему графическому представлению:

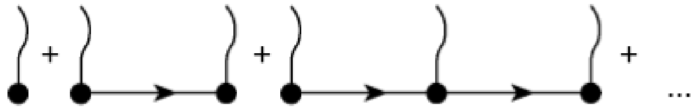

Рис. 2: Диаграммный ряд для Σ_n. Линии соответствуют $\sum_{n_i\neq n} G_{n_i}^{(0)}$, а волнистые линии соответствуют $V_{n_i n_j}$

4. Напишите явно выражение для Σ_n вплоть до второго порядка теории возмущений, и выпишите соответствующее выражение для пропагатора G_n.

5. По построению, полюса функции Грина $\hat{G}$ соответствуют собственным числам полного гамильтониана $\hat{H}$ — а значит, точные уровни энергии E_n определяются из уравнения

$$G_n^{-1}(E_n) = 0 \Rightarrow E_n = E_n^{(0)} + \Sigma_n(E_n) \tag{5}$$

Это трансцендентное уравнение уже можно достаточно просто решить с учётом малости матричных элементов V с нужной точностью (которая должна соответствовать той же точностью, с которой вы вычислили $\Sigma_n(E)$. Решите его и покажите, что его решение воспроизводит известные формулы для первых двух поправок по теории возмущений к собственным значениям.