

Классическая теория поля

Задача 1. Комфортная теория поля (10 баллов)

Рассмотрите теорию скалярного поля с действием

$$S = \int d^4x \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{\lambda}{4} \phi^4 \right). \quad (1)$$

Убедитесь, что теория инвариантна относительно **преобразований дилатации** $\phi(x^\mu) \rightarrow \alpha \phi(\alpha x^\mu)$. Найдите сохраняющийся ток.

Задача 1.1* (20 баллов)

Убедитесь, что можно так подобрать тензор-энергии импульса, чтобы выполнялось соотношение $T^\mu_\mu = 0$.

Задача 2. Уравнение Шрёдингера (60 баллов)

Рассмотрите комплексное поле $\psi(\mathbf{x})$ со следующим действием¹:

$$S[\psi, \bar{\psi}] = \int dt d^d \mathbf{x} \left[i \bar{\psi} \partial_t \psi - \frac{\nabla \bar{\psi} \nabla \psi}{2m} - U(\mathbf{x}) \bar{\psi} \psi \right] \quad (2)$$

Выпишите уравнения движения. Обратите внимание, что действие содержит только первую производную по времени, и поэтому стандартная схема перехода к гамильтонову формализму должна быть слегка модифицирована — в частности, теперь поля ψ и $\bar{\psi}$ оказываются канонически сопряжены, и тут нет нужды вводить отдельные канонически сопряжённые импульсы. Выведите такую модификацию — преобразование Лежандра, гамильтониан, скобку Пуассона и уравнения Гамильтона.

Исследуйте сохраняющиеся токи, следующие из следующих симметрий этого действия:

1. **(10 баллов)** Симметрия $\psi(\mathbf{x}) \mapsto \psi(\mathbf{x}) e^{-i\varphi}$ (ток частиц)
2. **(10 баллов)** Симметрия по отношению к трансляциям времени $t \mapsto t + T$ (ток энергии)
3. **(10 баллов)** В отсутствие внешнего потенциала $U(\mathbf{x}) = \text{const}$, имеется симметрия по отношению к пространственным трансляциям $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} + \mathbf{a}$ (тензор давлений).
4. **(10 баллов)** Определите, как изменится правая часть уравнения непрерывности для импульса, если теперь добавить внешний потенциал $U(\mathbf{x})$.
5. **(10 баллов)** Квантовая частица массы m находится в основном состоянии в сферической трёхмерной полости радиуса R с бесконечными стенками. Исходя из найденного в предыдущих пунктах тензора давлений, определите давление, которое она оказывает на стенки.

Задача 3. Электродинамика (30 баллов)

Рассмотрите действие электродинамики

$$S[A_\mu] = -\frac{1}{4} \int d^4x F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (3)$$

1. **(10 баллов)** Получите уравнения движения. Запишите их в известной форме ($E^i = -F^{0i}$, $\epsilon^{ijk} B^k = -F^{ij}$).
2. **(10 баллов)** Найдите *канонический* тензор энергии-импульса. Сделайте его симметричным с помощью преобразования (20) с семинара, выбрав $K^{\mu\nu\lambda} \propto F^{\mu\nu} A^\lambda$. Сравните со стандартными формулами для плотности энергии электромагнитного поля $\mathcal{E} = (E^2 + B^2)/2$ и вектором Пойнтинга $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{B}$.
3. **(10 баллов)** Найдите *метрический* тензор энергии-импульса по формуле из семинара. Совпадает ли он с каноническим?

¹Вообще говоря, подобная теория поля часто встречается в нелинейной гидродинамике в контексте «нелинейного уравнения Шрёдингера» и т.п.