Фононы

Упражнения (25 баллов)

Упражнение 1. Теория Клейна-Гордона (10 баллов)

Покажите, что теорию, описывающую только продольные фононы, можно описать в терминах скалярного поля $\varphi(\boldsymbol{r})$, которое определяется через Фурье как $\varphi_{\boldsymbol{k}} = (\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{u}_{\boldsymbol{k}})/|k|$. Покажите, что теория поля, описывающая поле $\varphi(\boldsymbol{r})$, с точностью до обозначений совпадает с безмассовой теорией Клейна-Гордона, со скоростью света заменённой на скорость продольного звука $c \equiv c_l$:

$$\hat{H}_{\text{ph}} = \frac{\rho}{2} \int d\boldsymbol{r} \left[\hat{\pi}^2 + c^2 (\nabla \hat{\varphi})^2\right] \tag{1}$$

Упражнение 2. Ангармонизм (15 баллов)

При выводе гамильтониана фононов мы раскладывались по малости отклонения атомов от положения равновесия, $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r})$. Учёт подобных эффектов приведёт к появлению нелинейных членов в гамильтониане — членов вида $\lambda \int d\boldsymbol{r} \hat{\varphi}^3$ (и старших). В таком случае, фононы — состояния $|\boldsymbol{k}\rangle = \hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k}} |0\rangle$ — уже не являются собственными состояниями гамильтониана, а имеют конечное время жизни. Убедитесь, что если закон дисперсии имеет отрицательную кривизну[1], $\omega_{\boldsymbol{k}} \simeq ck - \alpha k^3$ (предполагая α малым параметром), то время жизни, вычисленное по золотому правилу Ферми, оказывается бесконечным чисто из кинематических соображений[2].

Задачи (75 баллов)

Задача 1. Время жизни фонона (35 баллов)

Рассмотрите модель трёхмерного металла, описывающую электроны, взаимодействующие с фононами:

$$\hat{H} = \int d\boldsymbol{r} \left[\hat{\psi}^\dagger \left(-\frac{1}{2m}\Delta - \mu\right)\hat{\psi} + \frac{\rho}{2}\left(\hat{\pi}^2 + c^2(\nabla\hat{\varphi})^2\right) + \frac{gn}{\nu}\hat{\psi}^\dagger\hat{\psi}(|\nabla|\hat{\varphi})\right] = \sum_{\boldsymbol{p}} \epsilon_{\boldsymbol{p}} \hat{c}^\dagger_{\boldsymbol{p}} \hat{c}_{\boldsymbol{p}} + \sum_{\boldsymbol{k}} \omega_{\boldsymbol{k}} \hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k}} \hat{a}_{\boldsymbol{k}} + \hat{H}_{\text{e-ph}}$$

$$\epsilon_{\boldsymbol{p}} = \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m} - \mu, \quad \omega_{\boldsymbol{k}} = c|\boldsymbol{k}|, \quad [\hat{a}_{\boldsymbol{p}}, \hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{q}}] = \{\hat{c}_{\boldsymbol{p}}, \hat{c}^\dagger_{\boldsymbol{q}}\} = \delta_{\boldsymbol{pq}}$$

(оператор $|\nabla|$ действует в Фурье-пространстве как домножение на $i|k|$). Концентрация электронов равна n. Вычислите время жизни фонона с частотой ω в такой системе — волновая функция которой представляет собой произведение волновой электронной системы $|\Omega\rangle$ (заполненная Ферми-сфера) и фононного вакуума $|0\rangle$.

1. Предлагается использовать золотое правило Ферми, используя $\hat{H}_{e-ph}$ как возмущение. Начальное состояние содержит фонон импульсом $\boldsymbol{k}$: $|i\rangle = \hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k}} |0\rangle$. Конечное состояние содержит электрон-дырочную пару $|f\rangle = \hat{c}^\dagger_{\boldsymbol{p}_1} \hat{c}_{\boldsymbol{p}_2} |\Omega\rangle$ (при этом импульс электрона равен $\boldsymbol{p}_1$ и $|\boldsymbol{p}_1| > p_F$; а импульс дырки равен $-\boldsymbol{p}_2$ и $|\boldsymbol{p}_2| < p_F$). Покажите, что только такие матричные элементы отличны от нуля $H^{\text{e-ph}}_{fi} = \langle i| \hat{H}_{\text{e-ph}} |f\rangle \neq 0$. Вычислите матричный элемент; покажите, что он отличен от нуля при выполнении закона сохранения импульса $\boldsymbol{k} = \boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{p}_2$.

2. Вычислите энергию начального состояния ϵ_i и конечного состояния ϵ_f.

3. Время жизни определяется скоростью переходов $w_{i\to f} = 2\pi \left|H^{(e-ph)}_{if}\right|^2 \delta(\epsilon_i - \epsilon_f)$, просуммированному по всем конечным состояниям $\tau_i^{-1} = \sum_f w_{i\to f}$. Покажите, что у этого выражения имеется конечный предел бесконечного объема системы $V \to \infty$ (с заменой сумм по импульсам на интегралы).

4. Чтобы разобраться с кинематикой рассеяния, удобно параметризовать конечные импульсы согласно $\boldsymbol{p}_{1,2} = \boldsymbol{p} \pm \frac{\boldsymbol{k}}{2}$, что автоматически удовлетворяет закону сохранения импульса. Энергию и импульс фонона нужно считать малыми, так что $\omega \ll E_F$ и $k \ll p_F$.

5. Выразите ответ через безразмерный параметр $\zeta = \frac{g^2 n^2}{\nu\rho c^2}$.

Литература [1, задача 31]

---

[1] В частности, ровно такую кривизну имеет спектр в модели атомов со взаимодействием между ближайшими соседями — $\omega_{\boldsymbol{k}} = \frac{2c}{a}|\sin\frac{ka}{2}| \sim ck - \frac{c}{24}k^3a^2$

[2] Говорят, что такой спектр **нераспадный**

Задача 2. Время жизни электрона (40 баллов)

В модели из предыдущей задачи, вычислите теперь «время жизни»[3] электрона. Отличия от предыдущей задачи заключаются в следующем:

1. Начальное состояние содержит электрон с импульсом $p > p_F$: $|i\rangle = \hat{c}^\dagger_{\boldsymbol{p}}|0\rangle$ (при этом мы предполагаем возбуждение в окрестности поверхности Ферми, то есть $p - p_F \ll p_F$). Конечное состояние содержит фонон с импульсом $\boldsymbol{k}$ (который предполагается малым, $k \ll p_F$) и электрон с импульсом $\boldsymbol{p}'$: $|f\rangle = \hat{c}^\dagger_{\boldsymbol{p}'}\hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k}}|0\rangle$. Продемонстрируйте, что только такие матричные элементы взаимодействия отличны от нуля $H^{\text{e-ph}}_{fi} \neq 0$, а также что такой матричный элемент отличен от нуля только при выполнении закона сохранения импульса $\boldsymbol{p}' = \boldsymbol{p} - \boldsymbol{k}$, а также только при $p' > p_F$.

2. Для кинематики предлагается использовать следующее приближение. Поскольку импульс Ферми, а следовательно импульсы электронов очень велики (в частности, $k \ll p, p'$), то при учёте закона сохранения энергии предлагается использовать следующее приближение: $\varepsilon_{\boldsymbol{p}-\boldsymbol{k}} \approx \varepsilon_{\boldsymbol{p}} - \boldsymbol{k}\cdot\nabla_{\boldsymbol{p}}\varepsilon_{\boldsymbol{p}} = \varepsilon_{\boldsymbol{p}} - v_F k\cos\theta$, где $v_F = p_F/m \approx p/m$ — групповая скорость электронов в металле. С учётом этого, проинтегрируйте по конечным состояниям, которые параметризуются импульсом фонона $\boldsymbol{k}$, и вычислите время жизни.

3. Выразите ответ через безразмерный параметр ζ, а также через энергию электрона (отсчитанную от энергии Ферми) $\xi = \varepsilon_{\boldsymbol{p}} - \varepsilon_F \approx v_F(p - p_F)$, и оцените его, используя оценку для энергии Дебая[4] $\omega_D \sim cp_F$

Литература [1, задача 28]

Список литературы

[1] Л.С. Левитов and А.В. Шитов. *Функции Грина. Задачи и решения.* ФИЗМАТЛИТ, 2003.

[3]Электрон никуда не девается, и в этом смысле терминология «времени жизни» не совсем корректна. Корректнее говорить о времени релаксации энергии, поскольку акт взаимодействия электрон с фононом неупругий и приводит к диссипации энергии.

[4]В металле, Ферми-импульс и Дебаевский волновой вектор, как правило, имеют порядок обратной постоянной решётки $p_F \sim k_D \sim 1/a$