Функции Грина

Клейн-Гордон: $S = \int d^4x \left((\partial_\mu \phi)^2 - m^2\phi^2 \right)$

$\phi(x) \in \mathbb{R}$

Квантовали: $[\hat\phi(x), \hat\pi(y)] = i\delta(x-y)$

$\hat H = \frac12 \int d^3x \left(\hat\pi^2 + (\nabla\hat\phi)^2 + m^2\hat\phi^2\right)$

$$\hat\phi(x) = \frac{1}{\sqrt V}\sum_{\vec p} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \left(\hat a_p e^{-ipx} + \hat a_p^+ e^{ipx}\right)$$

4-мерный, 3-мерный, $p_\mu x^\mu = E_p t - \vec p \vec x$

$E_p = \sqrt{p^2+m^2}$

$\hat H = \sum_p E_p \left(\hat a_p^+ \hat a_p + 1/2\right)$

Напр.: $\phi^4 \Rightarrow S = S_{KG} - \frac{\lambda}{4!}\int d^4x\, \phi^4$

Ключ. объект в КТП: корреляторы

$\langle 0|\hat\phi(x_1)\hat\phi(x_2)\dots\hat\phi(x_n)|0\rangle$

Корр. ф-ция, ф-ция Грина, пропагатор, ...

1) $\langle 0|\hat\phi(x)|0\rangle = 0$, очевидно

$\langle 0|\hat\phi(x_1)\hat\phi(x_2)\hat\phi(x_3)|0\rangle = 0$

2) $\langle 0|\hat\phi(x)\hat\phi(y)|0\rangle = D(x-y)$

$\hat\phi^{(-)}|0\rangle = 0$

$\langle 0|\hat\phi^{(+)} = 0$

$\hat\phi(x) = \hat\phi^{(+)}(x) + \hat\phi^{(-)}(x)$

только $\hat a^+$, только $\hat a$

общий рецепт

$= \langle 0|\left(\hat\phi^{(+)}(x) + \hat\phi^{(-)}(x)\right)\left(\hat\phi^{(+)}(y)+\hat\phi^{(-)}(y)\right)|0\rangle$

$= \langle 0|[\hat\phi^{(-)}(x), \hat\phi^{(+)}(y)]|0\rangle + \langle 0|\phi^{(+)}(y)\phi^{(-)}(x)|0\rangle$

$= [\hat\phi^{(-)}(x), \hat\phi^{(+)}(y)]$

3) $\langle 0|\hat\phi_1\hat\phi_2\hat\phi_3\hat\phi_4|0\rangle = \langle 0|(\phi_1^+ + \phi_1^-)(\phi_2^+ + \phi_2^-)(\phi_3^+ + \phi_3^-)(\phi_4^+ + \phi_4^{(-)})|0\rangle =$

$= [\ ][\ ] + [\ ][\ ] + [\ ][\ ] + \dots$

$\sum_{\vec p} \to V\int \frac{d^Dp}{(2\pi)^D}$

$$D(x-y) = [\hat\phi^{(-)}(x), \hat\phi^{(+)}(y)] = \frac1V \sum_{p_1,p_2} \frac{1}{\sqrt{2E_{p_1}}}\frac{1}{\sqrt{2E_{p_2}}} \cdot \underbrace{[\hat a_{p_1}, \hat a^+_{p_2}]}_{=\delta_{p_1p_2}} e^{-ip_1x + ip_2y}$$

$$= \frac1V \sum_p \frac{1}{2E_p} e^{-ip(x-y)} \underset{V\to\infty}{=} \int \frac{(d^3p)}{2E_p} e^{-ip(x-y)}$$

4х-мерное произв.

лоренц.-инв.

1) Трансл. инв.: $D(x,y) = D(x-y)$

матрица буста

$\begin{pmatrix}E_p\\ \vec p\end{pmatrix} = \hat S^{-1}\begin{pmatrix}E_{p'}\\ p'\end{pmatrix}$

2) Лоренц-инв: если делать буст $D(\hat S x) = D(x) \neq 0$ для простр.-подобн., врем.-подобн. $x^2 \gtrless 0$

$[\hat\phi(x), \hat\phi(y)]$ должен знать о причинности

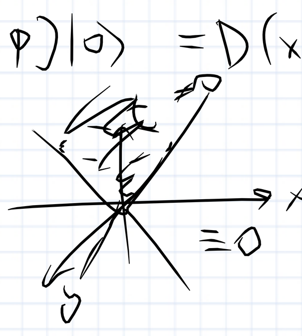
$D_R(x-y) \overset{def}{=} \theta(x^0-y^0)\langle 0|[\hat\phi(x),\hat\phi(y)]|0\rangle$

причинная ФГ запаздыв.

$\overset{?}{=} 0$ если $(x-y)^2 = -\vec r^2 < 0$

$\langle 0|[\phi\ \phi]|0\rangle = D(x-y) - D(y-x) = \int \frac{(d\vec p)}{2E_p}\left(e^{-ip(x-y)} - e^{ip(x-y)}\right)$

Простр.-под. инт.



$\equiv 0$

буст $= \int \frac{(d\vec p)}{2E_p}\left(e^{+i\vec p\vec r} - e^{-i\vec p\vec r}\right)$

нечётная по $\vec p \to -\vec p$

$= 0$

Для времени: $(x-y)^2 = t^2 > 0$

$\int \frac{(d\vec p)}{2E_p}\left(e^{-iE_pt} - e^{iE_pt}\right) \neq 0$

$x = \begin{pmatrix}t\\ \vec r\end{pmatrix}$

$$D_R(\omega,\vec p) = \int_0^\infty dt\, e^{i\omega t}\int d^3r\, e^{-i\vec p\vec r} \times \int \frac{(d^3p')}{2E_{p'}}\left(e^{-ip'x} - e^{ip'x}\right)$$

$e^{-iE_{p'}t + i\vec p'\vec r}$ с.с.

$\int d^3r\, e^{-i\vec p\vec r \pm i\vec p'\vec r} = (2\pi)^3\delta(\vec p \pm \vec p')$

$\int_0^\infty dt\, e^{iEt} = \lim_{\epsilon\to0}\int_0^\infty e^{iEt-\epsilon t}dt = \frac{1}{\epsilon - iE} = \frac{i}{E+i0}$

$$= \int_0^\infty dt\, e^{i\omega t}\frac{1}{2E_p}\left(e^{-iE_pt} - e^{iE_pt}\right) =$$

$$= \frac{1}{2E_p}\left(\frac{1}{\omega - E_p + i0} - \frac{1}{\omega+E_p+i0}\right) = \frac{i}{(\omega+i0)^2 - E_p^2} =$$

$$= \frac{i}{(\omega+i0)^2 - \vec p^2 - m^2} \text{ "=" } \frac{i}{p^2-m^2}$$

4вектор (ω, p)

$\Rightarrow (p^2-m^2)D_R(p) = i$

$(-\partial^2 - m^2)D_R(x) = i\delta(x) \leftarrow$ Ф.Г. класс. ур-ния КГ

Фейнман. ФГ.

Когда мы строим Т.В.

$\hat S(t) = \hat T\exp\left(-i\int V(t)dt\right) = \sum_n \frac{1}{n!}\int dt_1\dots dt_n\, \hat T\{V(t_1)\dots V(t_n)\}$

$$D_F(x-y) = \langle 0|\hat T\{\hat\phi(x)\hat\phi(y)\}|0\rangle = \begin{cases} D(x-y), & \text{если } x^0-y^0>0 \\ D(y-x), & \text{иначе}\end{cases}$$

$$\hat T\{\hat A(t_1)\hat B(t_2)\} = \begin{cases}\hat A(t_1)\hat B(t_2), & t_1>t_2 \\ \pm\hat B(t_2)\hat A(t_1), & t_1<t_2\end{cases}$$

статистика

$= \theta(x^0-y^0)D(x-y) + \theta(y^0-x^0)D(y-x)$

$$\Rightarrow D_F(\omega,\vec p) = \frac{1}{2E_p}\left(\int_0^\infty dt\, e^{i\omega t}e^{-iE_pt} + \int_{-\infty}^0 dt\, e^{i\omega t + iE_pt}\right)$$

$$= \frac{1}{2E_p}\left(\frac{i}{\omega - E_p + i0} - \frac{i}{\omega+E_p - i0}\right) = \frac{i}{\omega^2 - (E_p - i0)^2} \equiv \frac{i}{p^2 - m^2 + i0}$$

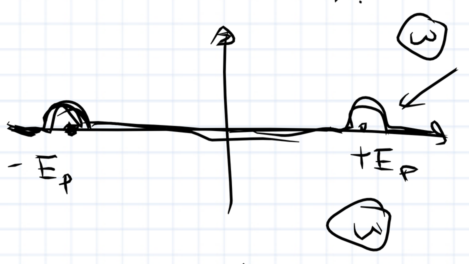
$\omega = \pm(E_p - i0)$

1) $(p^2-m^2)D_F(p) = i$

$(-\partial^2-m^2)D_F(x-y) = i\delta(x-y) \leftarrow$ тоже ФГ ур. КГ.

2) $D(t) = \int e^{-i\omega t} D(\omega)(d\omega)$

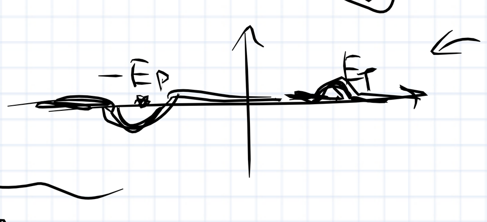
где полюса на $\omega\in\mathbb R$



для запазд. ФГ

$(\omega+i0)^2 - E_p^2$

$\omega = \pm E_p - i0$



для фейнм. ФГ

$(D_F - D_R)$ — реш. одн. ур-ния

Старшие корр.

$\langle 0|\hat\phi_1\hat\phi_2\hat\phi_3\hat\phi_4|0\rangle = \langle\phi_1\phi_2\rangle\langle\phi_3\phi_4\rangle \pm \langle\phi_1\phi_3\rangle\langle\phi_2\phi_4\rangle + \langle\phi_1\phi_4\rangle\langle\phi_2\phi_3\rangle$ ← теорема Вика

1. Если фермионы ⇒ знак перестановки
2. Она же работает для T-средних

$\langle 0|\hat T\{\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4\}|0\rangle = D_F(1-2)D_F(3-4) + \dots$