

Многочастичная квантовая механика и вторичное квантование

Упражнения (40 баллов)

Упражнение 1 (Вторичное квантование, введение, 30 баллов)

В этом наборе упражнений мы покажем, как устроены одночастичные и многочастичные волновые функции на языке вторичного квантования. Для решения этих задач достаточно использовать только коммутационные соотношения $[\hat{\psi}(\mathbf{x}), \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{y})]_{\mp} = \hat{\psi}(\mathbf{x})\hat{\psi}^\dagger(\mathbf{y}) \mp \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{y})\hat{\psi}(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})$, а также тот факт, что $\hat{\psi}(\mathbf{x})|0\rangle = 0$. Во всех упражнениях исследуйте обе статистики — Бозе и Ферми.

1. (5 баллов) Определим одночастичный координатный базис естественным образом как $|\mathbf{x}\rangle \equiv \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{x})|0\rangle$ и двухчастичный $|\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\rangle \equiv \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{x}_1)\hat{\psi}^\dagger(\mathbf{x}_2)|0\rangle$. Как выглядит нормировка этих состояний $\langle \mathbf{x}|\mathbf{x}'\rangle$ и $\langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2|\mathbf{x}'_1, \mathbf{x}'_2\rangle$? Как записывается проектор на одночастичное $\hat{\mathbb{P}}(\mathcal{F}_1)$ и двухчастичное $\hat{\mathbb{P}}(\mathcal{F}_2)$ подпространства через эти вектора?
2. (5 баллов) Пусть состояние $|\psi_1\rangle$ описывается некой известной одночастичной волновой функцией $\psi_1(\mathbf{x})$. Как выразить оператор рождения частицы в таком состоянии через полевые операторы, так что $|\psi_1\rangle = \hat{a}^\dagger[\psi_1(\mathbf{r})]|0\rangle$? Покажите непосредственным вычислением, что $\langle \mathbf{x}|\psi_1\rangle = \psi_1(\mathbf{x})$.
3. (5 баллов) Теперь по аналогии рассмотрите двухчастичное состояние, в котором одна частица находится в состоянии $\psi_1(\mathbf{x})$, а вторая — в состоянии $\psi_2(\mathbf{x})$, ортогональном $\psi_1(\mathbf{x})$. Покажите непосредственным вычислением, что при этом соответствующая координатная волновая функция $\psi_{12}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2|\psi_1, \psi_2\rangle$ представляет собой детерминант Слэтера в случае, если ψ -операторы образуют фермионную алгебру, и перманент матрицы для бозонной алгебры. Используя найденные выше выражения для проекторов, убедитесь, что состояние автоматически нормировано: $\langle \psi_1, \psi_2|\psi_1, \psi_2\rangle = 1$.
4. (5 баллов) Подействовав оператором двухчастичного взаимодействия

$$\hat{V} = \frac{1}{2} \int d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{x}_1) \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{x}_2) V(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \hat{\psi}(\mathbf{x}_2) \hat{\psi}(\mathbf{x}_1) \quad (1)$$

на базисное состояние $|\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N\rangle$, докажите эквивалентность этого оператора соответствующему оператору в представлении первичного квантования:

$$\hat{V} = \frac{1}{2} \sum_{n \neq m} V(\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_m) \quad (2)$$

5. (10 баллов) Рассмотрите среднее значение оператора $\hat{V}$ по состоянию $|\psi_1, \psi_2\rangle$. Покажите, что при этом получается два члена, первый из которых имеет смысл классического взаимодействия плотностей («член *Хартри*»), а второй не имеет классической интерпретации, и к тому же зависит от статистики («член *Фока*», или же «обменный член»).

Упражнение 2 (Эффективное «взаимодействие», 10 баллов)

Рассмотрите систему двух не взаимодействующих частиц одинаковой массы m в потенциале гармонического осциллятора:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_1^2}{2m} + \frac{\hat{p}_2^2}{2m} + \frac{m\omega^2 \hat{x}_1^2}{2} + \frac{m\omega^2 \hat{x}_2^2}{2}.$$

Запишите волновую функцию системы $\Psi(x_1, x_2)$, отвечающую собственному состоянию с энергией $E = 2\hbar\omega$, и вычислите $\langle (x_1 - x_2)^2 \rangle$ в этом состоянии. Рассмотрите отдельно каждый из трёх случаев, когда две частицы: а) различимы, б) неразличимые фермионы, в) неразличимые бозоны.

Задача 1 (Флуктуации числа фермионов на отрезке, 35 баллов)

Вступление: Как правило, в задачах многочастичной квантовой механики число частиц N фиксированно — и работать необходимо не во всём Фоковском пространстве, но в подпространстве $\mathcal{F}_N$, что, как правило, достаточно неудобно: скажем, задача поиска основного состояния становится задачей поиска *условного минимума* (энергии, при условии $\langle \hat{N} \rangle = N$). Стандартный способ решения задач условного экстремума — это ввод множителей Лагранжа: вместо условного минимума оператора $\hat{H}$, необходимо искать безусловный минимум оператора $\hat{H}' = \hat{H} - \mu \hat{N}$; а затем находить значение множителя Лагранжа μ (который носит название **химического потенциала**) из условия $\langle \hat{N} \rangle = N$. Такой трюк работает как для поиска основного состояния (минимизация энергии), так и для поиска термодинамически равновесных конфигураций при конечной температуре (минимизация свободной энергии).

Рассмотрите одномерную систему N бесспиновых фермионов, живущих на одномерной отрезке большой длины L с периодическими граничными условиями (для всей задачи подразумевается термодинамический предел $L \rightarrow \infty$ при

фиксированной концентрации частиц $n = \frac{N}{L}$; поэтому все поправки вида $\sim \frac{1}{N}$ можно с чистой совестью выбрасывать); система описывается следующим гамильтонианом

$$\hat{H}_{el} = \int_0^L dx \hat{\psi}^\dagger(x) \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 - \mu \right) \hat{\psi}(x) \quad (3)$$

1. Используя преобразование Фурье, диагонализуйте гамильтониан $\hat{H}_{el}$ — приведите его к виду невзаимодействующих «фермионных осцилляторов» $\hat{H}_{el} = \sum_p \epsilon_p \hat{a}_p^\dagger \hat{a}_p$, с коммутационными соотношениями $\{\hat{a}_p, \hat{a}_{p'}^\dagger\} = \delta_{pp'}$. Какой закон дисперсии полученных квазичастиц ϵ_p ?
Указание: удобное с точки зрения физики квантовое число p , которое перечисляет состояния — это физический импульс частиц; он хорошо определён в пределе бесконечной системы $L \rightarrow \infty$.
2. Покажите, что основное состояние $|\Omega\rangle$ такой системы соответствует заполненной ферми-сфере, а именно — $|\Omega\rangle = \prod_{|p| < p_F} \hat{a}_p^\dagger |0\rangle$ (что в представлении чисел заполнения соответствует состоянию с $n_p = \theta(p_F - p)$). Свяжите величину граничного импульса Ферми p_F с химическим потенциалом (который носит название энергии Ферми). Свяжите обе эти величины с концентрацией частиц n из условия $\langle \hat{N} \rangle = N$. Вычислите также энергию основного состояния в пересчёте на одну частицу $\epsilon = \frac{1}{N} \langle \hat{H} \rangle$.
3. Можно перейти от исходных операторов рождения и уничтожения *электронов* к операторам рождения и уничтожения *квазичастиц* — элементарных возбуждений системы — электронов для $p > p_F$ и дырок для $p < p_F$:

$$\hat{c}_p \equiv \begin{cases} \hat{a}_p, & p > p_F \\ \hat{a}_p^\dagger, & p < p_F \end{cases}, \quad (4)$$

при этом алгебра новых операторов точно такая же¹, однако основное состояние $|\Omega\rangle$ в терминах новых частиц будет совпадать с вакуумом $|0\rangle$. Перепишите гамильтониан $\hat{H}$, а также ψ -операторы, в терминах новых операторов. Нарисуйте закон дисперсии новых квазичастиц².

4. Рассмотрите отрезок конечной (но достаточно большой) длины $p_F^{-1} \ll l \ll L$. Оператор числа частиц на этом отрезке записывается следующим образом:

$$\hat{n} = \int_0^l dx \hat{\psi}^\dagger(x) \hat{\psi}(x) \quad (5)$$

Вычислите флуктуацию числа фермионов на этом отрезке $\delta n^2 = \langle \hat{n}^2 \rangle - \langle \hat{n} \rangle^2$. Для вычисления стоящих тут средних, удобно пользоваться квазичастичными операторами $\hat{c}_p$, поскольку в терминах этих операторов основное состояние совпадает с вакуумом $|0\rangle$.

5. Пусть теперь имеется такой-же *классический* газ, и каждая из частиц независимо от остальных равномерно распределена по всему объёму. Найдите полную функцию распределения числа частиц в маленьком отрезке длины l ; вычислите флуктуацию этого числа δn^2 . Сравните полученные ответы.

Источник ЛШ, глава 5 «идеальный Ферми-газ», задача 26.

Задача 2 (Фриделевские осцилляции, 25 баллов)

Рассмотрите одномерный Ферми-газ из предыдущей задачи, по-прежнему помещённый в термодинамически большой «ящик», но на сей раз этот ящик моделируется бесконечными стенками в точках $x = 0$ и $x = L$ (тем самым, граничные условия — нулевые вместо периодических).

1. Диагонализуйте гамильтониан, перейдя к базису собственных состояний одночастичного гамильтониана — стоячим волнам; определите, как устроено основное состояние $|\Omega\rangle$. Хотя импульс не является теперь хорошим квантовым числом, поскольку трансляционная инвариантность нарушена границами; однако модуль импульса — является, поэтому по-прежнему можно говорить об импульсе Ферми p_F . Покажите, что он связан с концентрацией частиц n точно таким же выражением, как и в случае периодических граничных условий.
2. Вычислите распределение плотности газа вблизи стенки в термодинамическом пределе (то есть $x \ll L$). Оно даётся следующей величиной:

$$\rho(x) = \langle \hat{\rho}(x) \rangle = \langle \Omega | \hat{\psi}^\dagger(x) \hat{\psi}(x) | \Omega \rangle \quad (6)$$

¹Такой трюк работает только в случае статистики Ферми!

²Обратите внимание: эти операторы описывают *возбуждения*, а энергия возбуждений — по определению положительная величина