

Классическая теория поля

Задача 1. Подвешенная цепочка (20 баллов)

Рассмотрим движение свободно подвешенной цепочки длины L и линейной плотности ρ в поле тяжести g . В этой задаче предлагается изучить малые отклонения от положения равновесия, оставляющие цепочку в вертикальной плоскости.

1. (10 баллов) Составить лагранжиан и получить уравнения движения Эйлера-Лагранжа.
2. (5 баллов) Перейти к Гамильтониану и выписать уравнения Гамильтона.
3. (5 баллов) Найти собственные моды системы.

Задача 2. Уравнение Шрёдингера (50 баллов)

Рассмотрите комплексное поле $\psi(\mathbf{x})$ со следующим действием¹:

$$S[\psi, \bar{\psi}] = \int dt d^d \mathbf{x} \left[i \bar{\psi} \partial_t \psi - \frac{\nabla \bar{\psi} \nabla \psi}{2m} - U(\mathbf{x}) \bar{\psi} \psi \right] \quad (1)$$

Выпишите уравнения движения. Обратите внимание, что действие содержит только первую производную по времени, и поэтому стандартная схема перехода к гамильтонову формализму должна быть слегка модифицирована — в частности, теперь поля ψ и $\bar{\psi}$ оказываются канонически сопряжены, и тут нет нужды вводить отдельные канонически сопряжённые импульсы. Выведите такую модификацию — преобразование Лежандра, гамильтониан, скобку Пуассона и уравнения Гамильтона.

Исследуйте сохраняющиеся токи, следующие из следующих симметрий этого действия:

1. (5 баллов) Симметрия $\psi(\mathbf{x}) \mapsto \psi(\mathbf{x}) e^{-i\varphi}$ (ток частиц)
2. (5 баллов) Симметрия по отношению к трансляциям времени $t \mapsto t + T$ (ток энергии)
3. (10 баллов) В отсутствие внешнего потенциала $U(\mathbf{x}) = \text{const}$, имеется симметрия по отношению к пространственным трансляциям $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} + \mathbf{a}$ (тензор давлений).
4. (10 баллов) Определите, как изменится правая часть уравнения непрерывности для импульса, если теперь добавить внешний потенциал $U(\mathbf{x})$.
5. (20 баллов) Квантовая частица массы m находится в основном состоянии в сферической трёхмерной полости радиуса R с бесконечными стенками. Исходя из найденного в предыдущих пунктах тензора давлений, определите давление, которое она оказывает на стенки.

Задача 3. Теория возмущения (30 баллов)

Пусть нам задан функционал $F[\phi|\alpha]$ в котором динамическом полем выступает $\phi(\mathbf{r})$, а поле $\alpha(\mathbf{r})$ является внешним и заданным. Нас интересует экстремальное значение функционала достигающееся на решении классического уравнения движения - $\delta F/\delta \phi = 0$. Классическое уравнение мы не можем решить в общем виде для $\alpha(\mathbf{r})$, зато имеем решение $\phi_0(\mathbf{r})$ при $\alpha(\mathbf{r}) = 0$. Предполагая поле $\alpha(\mathbf{r})$ малым, получите в общем виде выражение для $F^{(1)}[\alpha]$ и $F^{(2)}[\alpha]$ через $\phi_0(\mathbf{r})$, для функционала вида:

$$F[\phi|\alpha] = F_0[\phi] + \int d\mathbf{r} \phi^2(\mathbf{r}) \alpha(\mathbf{r}). \quad (2)$$

¹ Вообще говоря, подобная теория поля часто встречается в нелинейной гидродинамике в контексте «нелинейного уравнения Шрёдингера» и т.п.