

Графен

Упражнения (20 баллов)

Упражнение 1 (10 баллов) Выведите гамильтониан для электронов из долины K' .

Упражнение 2 (5 баллов) Выпишите волновые функции электронов с импульсом \mathbf{p} из долины K (то есть полный квазиимпульс равен $\mathbf{K} + \mathbf{p}$).

Упражнение 3 (5 баллов) Реальные значения туннельного матричного элемента для графена равно $t \simeq 3.11 \text{ эВ}$, а постоянная решётки равна $a \simeq 1.42 \text{ \AA}$. Чему равна групповая скорость электронов? До каких температур низкоэнергетическое приближение оправдано?

Задачи (80 баллов)

Задача 1. Одномерная модель (30 баллов)

Рассмотрите одномерный прыжковый гамильтониан на цепочке длины L из N узлов, с периодическими граничными условиями:

$$\hat{H} = -t \sum_n (\hat{a}_n^\dagger \hat{a}_{n+1} + h.c) \quad (1)$$

1. Диагонализируйте гамильтониан, введя операторы рождения и уничтожения частиц с фиксированным квазиимпульсом, \hat{a}_k и \hat{a}_k^\dagger . Найдите закон дисперсии квазичастиц.
2. Пусть эта система описывает бесспиновые фермионы, концентрация которых n . Покажите, что основное состояние соответствует заполнению состояний с $k \in (-k_F, k_F)$. Как «Ферми-импульс» k_F связан с n ?
3. Низкоэнергетические возбуждения возникают вблизи Ферми-точек, и представляют собой частицы движущиеся влево (вблизи $-k_F$) и вправо (вблизи k_F). Введите поля $\hat{\psi}(x) = (\hat{\psi}_L(x), \hat{\psi}_R(x))$, и постройте низкоэнергетическую теорию поля.

Задача 2. Klein paradox (20 баллов)

Рассмотрите электрон, движущийся в графене в долине K с гамильтонианом $\hat{H} = v(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})$. На лист графена напылён потенциальный барьер, описываемый следующим потенциалом:

$$V(x, y) = \begin{cases} V_0, & x \in [-D/2, D/2] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}, \quad (2)$$

(плавный потенциал — считая $D \gg a$ — одинаково действует на подрешётки A и B). Пусть электрон с энергией $V_0 > E > 0$ налетает по нормали на ступеньку. Найдите коэффициенты прохождения T и отражения R .

Задача 3. Поглощение света (30 баллов)

Рассмотрите лист графена, на который по нормали падает плоско-поляризованная электромагнитная волна частоты ω_0 . Исследуйте поглощение электромагнитного излучения.

1. Электромагнитное поле — калибровочное, поэтому взаимодействие с электронами описывается стандартным образом, путём замены импульса $\hat{\mathbf{p}}$ на «ковариантную производную» $\hat{\mathbf{p}} - \frac{e}{c} \mathbf{A}$, и \mathbf{A} — вектор-потенциал. Выпишите вектор-потенциал, описывающий такую задачу (в калибровке Вейля $\varphi = 0$).
2. Используя золотое правило Ферми, вычислите поглощение энергии листом графена $\frac{dE_{abs}}{dt}$. Используйте тот факт, что единственный способ выполнить закон сохранения энергии и импульса — это переброска электрона из заполненной валентной зоны (ветви спектра $E_{\mathbf{p}}^{(-)}$) в пустую зону проводимости (ветви спектра $E_{\mathbf{p}}^{(+)}$). Не забудьте учесть вырождения по спинам и долинам. Полученная величина должна быть пропорциональна площади листа A^1 , которая возникнет из-за суммирования по начальным состояниям.
3. Вычислите вектор Пойнтинга падающей волны \mathcal{S} , и полное количество энергии, падающей на лист $\frac{dE_{tot}}{dt} = \mathcal{S} \cdot \mathbf{A}$. Найдите коэффициент поглощения $\frac{dE_{abs}/dt}{dE_{tot}/dt}$.

¹Конечно, более осмыслена ситуация, когда на графен светят лазером с конечной площадью пятна A . Однако, покуда пятно макроскопически большое, $A \gg a^2$, ничего не изменится.