

Диаграммная техника Фейнмана

Ангармонический осциллятор

В этом наборе задач предлагается изучить простейшую 0+1-мерную квантовую теорию поля — квантовую механику ангармонического осциллятора, описываемого действием

$$S = \int dt \left(\frac{1}{2} [(\partial_t \phi)^2 - \omega^2 \phi^2] - \frac{\mu}{3!} \phi^3 - \frac{\lambda}{4!} \phi^4 \right) \quad (1)$$

Задача 1. Вакуумные пузыри (30 баллов)

Изучите поведение ряда теории возмущений для нормировки интеграла по путям — среднего значения оператора эволюции в представлении взаимодействия:

$$Z = \langle \hat{S} \rangle_0, \quad \hat{S} = \mathcal{T} \left\{ \exp \left(-i \int dt \left(\frac{\mu}{3!} \phi^3(t) + \frac{\lambda}{4!} \phi^4(t) \right) \right) \right\} \quad (2)$$

1. (10 баллов) Разложите Z с точностью до членов $o(\mu^3, \lambda^3)$. Не производя пока явных вычислений, рассмотрите все Виковские спаривания для выписанных членов. Нарисуйте соответствующие им диаграммы Фейнмана, определите их симметричные факторы. Выпишите соответствующие им аналитические выражения, выразив его через невозмущённый пропагатор $D_0(t - t')$. Продемонстрируйте, что диаграмма с n вакуумными пузырями пропорциональна T^n .
2. (10 баллов) Повторите вычисление для $\ln Z$. Продемонстрируйте, что все вклады, содержащие T^n ($n > 1$) сокращаются.
3. (10 баллов) Произведите вычисление в первом исчезающем порядке $O(\mu^2, \lambda)$. Определите поправку к энергии основного состояния. Сравните ответ с ответом из «Квантовой механики» Ландау и Лифшица.

Задача 2. Функция Грина (40 баллов)

Теперь изучите поведение ряда теории возмущений для функции Грина:

$$D(t - t') = \langle \Omega | \hat{\phi}(t) \hat{\phi}(t') | \Omega \rangle = \left\langle \mathcal{T} \left\{ \phi(t) \phi(t') \hat{S} \right\} \right\rangle_0 / \langle \hat{S} \rangle_0 \quad (3)$$

1. (10 баллов) Повторите пункт 1 предыдущей задачи для числителя в этом выражении.
2. (10 баллов) Повторите вычисление для $D(t - t')$. Убедитесь, что все вакуумные пузыри сокращаются, и ответ не зависит от T .
3. (10 баллов) Выпишите выражение для собственной энергетической части с искомой точностью. Продемонстрируйте, что приводимая диаграмма $O(\lambda^2)$ в точности даётся выражением $\hat{D}_0 \hat{\Sigma}_1 \hat{D}_0 \hat{\Sigma}_1 \hat{D}_0$, где $\hat{\Sigma}_1$ — вклад в собственную энергетическую часть вида $O(\lambda)$. Вычислите приводимую диаграмму явно во временном представлении. Зачем нужно уравнение Дайсона и пересуммирование приводимых вкладов?
4. (10 баллов) Вычислите собственную энергетическую часть в первом исчезающем порядке $O(\mu^2, \lambda)$. Свяжите полученный ответ с поправкой к энергии первого возбуждённого состояния $\Delta E_{n=1}$. Сравните ответ с ответом из «Квантовой механики» Ландау и Лифшица.

Задача 3. «Обычная» теория возмущений (30 баллов)

Рассмотрите одночастичную квантомеханическую задачу с каким-то гамильтонианом $\hat{H} = \hat{H}^{(0)} + \hat{V}$ с возмущением $\hat{V}$. Будем предполагать полный набор собственных состояний и энергий невозмущённого гамильтониана известным $\hat{H}_0 |n\rangle = E_n^{(0)} |n\rangle$. Для простоты, будем предполагать отсутствие вырождения спектра.

Резольвента, или функция Грина, для оператора $\hat{H}$ определяется стандартным образом как $\hat{G}(E) = (E - \hat{H} + i0)^{-1}$; невозмущённую функцию Грина мы будем называть $\hat{G}^{(0)}(E) = (E - \hat{H}_0 + i0)^{-1}$.

1. Постройте операторный ряд теории возмущений по $\hat{V}$ для величины $\hat{G}$. Соответствующее диаграммное представление членов этого ряда имеет вид, изображённый на рисунке

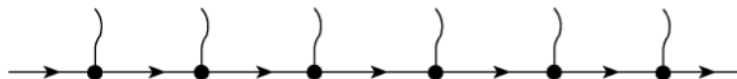


Рис. 1: Диаграммное представление произвольного элемента ряда теории возмущений для $\hat{G}$. Волнистой линии соответствуют операторы $\hat{V}$, а прямой — операторы $\hat{G}_0$.

2. Изучите полученный ряд в базисе собственных состояний гамильтониана $\hat{H}_0$. Направленная линия в таком случае имеет диагональный вид

$$\langle n | \hat{G}^{(0)} | m \rangle = G_n^{(0)} \delta_{nm}, \quad G_n^{(0)} = \frac{1}{E - E_n^{(0)} + i0}, \quad (4)$$

т.е. каждой такой линии соответствует индекс n , по которому происходит суммирование; а волнистой линии соответствует матричный элемент $V_{nn'}$. Запишите соответствующий ряд теории возмущений.

3. Чтобы вывести уравнение Дайсона, необходимо привести диаграммный ряд к «одночастично-неприводимому» ряду:

$$G_n = G_n^{(0)} + G_n^{(0)} \Sigma_n G_n^{(0)} + G_n^{(0)} \Sigma_n G_n^{(0)} \Sigma_n G_n^{(0)} + \dots, \quad \Rightarrow \quad G_n = \frac{1}{E - E_n^{(0)} - \Sigma_n(E) + i0} \quad (5)$$

Для этого при суммировании во всех промежуточных состояниях нужно явно выделить член с $n_i = n$ (на диаграммном языке такому члену мы поставим в соответствие перечёркнутую линии) и остальные, с $n_i \neq n$ (прямая линия). Покажите, что собственная энергетическая часть в таком случае даётся простой суммой всех диаграмм с не перечёркнутыми линиями:



Рис. 2: Диаграммный ряд для Σ_n . Линии соответствуют $\sum_{n_i \neq n} G_{n_i}^{(0)}$, а волнистые линии соответствуют $V_{n_i n_j}$

4. Напишите явно выражение для Σ_n вплоть до второго порядка теории возмущений, и выпишите соответствующее выражение для пропагатора G_n .
5. По построению, полюса функции Грина $\hat{G}$ соответствуют собственным числам полного гамильтониана $\hat{H}$ — а значит, точные уровни энергии E_n определяются из уравнения

$$G_n^{-1}(E_n) = 0 \Rightarrow E_n = E_n^{(0)} + \Sigma_n(E_n) \quad (6)$$

Это трансцендентное уравнение уже можно достаточно просто решить с учётом малости матричных элементов V с нужной точностью (которая должна соответствовать той же точности, с которой вы вычислили $\Sigma_n(E)$). Решите его и покажите, что его решение воспроизводит известные формулы для первых двух поправок по теории возмущений к собственным значениям.