

Интеграл по траекториям в квантовой теории поля

Упражнения

Упражнение 1. Теорема Вика (20 баллов)

Дифференцированием производящего функционала для вещественного Гауссова интеграла, продемонстрируйте явно, что выражение с четверным коррелятором $\langle \phi_i \phi_j \phi_k \phi_l \rangle$ выражается через попарные спаривания, как в теореме Вика.

Упражнение 2. Матричная теория поля (30 баллов)

Рассмотрим теорию случайных матриц $\hat{H}$ размера $n \times n$ со случайными элементами H_{ij} . Вес каждой матрицы пропорционален $P(H) \sim \exp(-\alpha \text{tr} H^2)$. В задаче рассмотрите два симметрических класса: i) GUE - унитарный класс комплексных матриц со свойством: $H^+ = H$, и ii) GOE - ортогональный класс действительных матриц со свойством $H^T = H$. Для обоих найдите коррелятор $\langle H_{ik} H_{kl} \rangle$, и с его помощью вычислить следующие средние:

$$\langle \text{tr} A H \cdot \text{tr} B H \rangle, \quad \langle \text{tr} A H B H \rangle,$$

где $\hat{A}$ и $\hat{B}$ это произвольные матрицы $n \times n$.

Упражнение 3. Пропагатор фотона (50 баллов)

Используя интеграл по траекториям, вычислите пропагатор фотона $D_{\mu\nu}(x-y) = \langle A_\mu(x) A_\nu(y) \rangle$ для электромагнетизма, описываемого следующим действием:

$$S[A_\mu] = -\frac{1}{4} \int d^4x F_{\mu\nu}(x) F_{\mu\nu}(x), \quad F_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x) \quad (1)$$

Соответствующий оператор имеет нулевую моду, что связано с калибровочной симметрией действия $S[A_\mu + \nabla\alpha] \equiv S[A_\mu]$, поэтому непосредственно обратить его невозможно. Для того, чтобы «обойти» эту проблему, можно ввести «фиксирующий калибровку» (gauge fix) и нарушающий калибровочную инвариантность член в действие:

$$S_{GF}[A_\mu, \xi] = -\frac{1}{2\xi} \int d^4x (\partial_\mu A_\mu)^2 \quad (2)$$

(например, предел $\xi \rightarrow 0$ соответствует калибровке Лоренца $\partial_\mu A_\mu = 0$).

Литература Обсуждение такого способа фиксации калибровки можно найти на английской Википедии https://en.wikipedia.org/wiki/Gauge_fixing#R.CE.BE_gauges; обсуждение проблемы квантования электромагнитного поля также есть в ПШ, стр. 93.