

Задачи по Квантовой Механике Осень 2015
Экзамен - 1

1. Три частицы равной массы взаимодействуют по притягивающему дельта-функциональному потенциалу ($V < 0$):

$$\hat{H} = -\frac{1}{2m} \sum_{i=1}^3 \partial_{x_i}^2 + V \sum_{i>j} \delta(x_i - x_j)$$

Покажите что функция вида

$$\psi(x_1, x_2, x_3) = e^{-a|x_1-x_2|-a|x_1-x_3|-a|x_2-x_3|}$$

с подходящим a является собственной для данного Гамильтониана. Чему равно соответствующее собственное значение? Отвечает ли оно основному состоянию?

2. Рассмотрите двухуровневую систему с $E_1 \neq E_2$ во внешнем поле с матричными элементами, связывающими два уровня между собой, так что:

$$V_{11} = V_{22} = 0, \quad V_{12} = V_{21}^* = v e^{i\omega t}.$$

Пусть при $t = 0$ заселен только один из уровней, так что $\psi_1(0) = 1, \psi_2(0) = 0$. Найдите заселенности уровней $|\psi_{1,2}(t)|^2$ при $t > 0$ двумя способами:

- (a) Решив уравнение Шредингера точно
 - (b) По теории возмущений в первом неисчезающем порядке по v . Рассмотрите два случая: w близко к $E_2 - E_1$ и w далеко от $E_2 - E_1$.
3. Рассмотрите спин $1/2$, взаимодействующий с магнитным полем $\mathbf{B}(t)$:

$$\hat{H} = -\mu \mathbf{B} \cdot \hat{\sigma},$$

вращающимся в плоскости yz :

$$\mathbf{B}(t) = B \left(0, \frac{1}{\cosh \omega t}, -\frac{\sinh \omega t}{\cosh \omega t} \right).$$

В начальный момент времени $t \rightarrow -\infty$ спин и поле направлены по оси z . Необходимо найти амплитуду вероятности p того, что спин останется смотреть по оси z после того, как поле завершит вращение при $t \rightarrow \infty$. Рассмотрите сначала случай малых частот и оцените ответ. Затем решите уравнение Шредингера точно и получите ответ, справедливый при любых частотах и сравните с приближенным ответом.

4. Частица находится в непроницаемом эллипсоиде с полуосями a, b, c такими, что $a \ll b$ и $a \ll c$. Найдите спектр низколежащих энергетических уровней.