

Задачи по Квантовой Механике Осень 2015
Математический минимум

1. Найдите асимптотику полиномов Лежандра:

$$P_l(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(x + \sqrt{x^2 - 1} \cos t \right)^l dt$$

для $x > 1$ при $l \rightarrow \infty$.

2. Найдите главный член асимптотического разложения функции Эйри:

$$\text{Ai}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(xt+t^3/3)} dt$$

при $x \rightarrow \infty$ и при $x \rightarrow -\infty$.

3. Найдите первые два члена асимптотического разложения функции Бесселя $J_\nu(z)$:

$$J_\nu(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C e^{\frac{z}{2}(t-1/t)} \frac{dt}{t^{\nu+1}},$$

при $z \rightarrow \infty$ (C - контур Ганкеля).

4. Определите асимптотическое поведение интеграла:

$$I(\lambda) = \int_{-1}^1 \frac{e^{i\lambda(z^3+3z)}}{\sqrt{1-z^2}} dz$$

при $\lambda \rightarrow \infty$.

5. Рассмотрите дифференциальное уравнение:

$$xu''(x) - xu'(x) - u(x) = 0.$$

Предполагая, что $x > 0$, постройте постройте два линейно независимых решения этого уравнения в виде контурных интегралов. Найдите их асимптотики при $x \rightarrow \infty$. Постройте его частное решение, удовлетворяющее условию $u(\infty) < \infty$, $u(0) = 1$.

6. Рассмотрите дифференциальные уравнения ниже. Воспользовавшись методом Лапласа, постройте общее решение этого уравнения (рассмотрите $x > 0$ для определённости). Укажите контуры, дающие линейно независимые решения. Вычислите асимптотики предлагаемых решений при $x \gg 1$ и $x \ll 1$.

(a)

$$xu''(x) - xu'(x) - \beta u(x) = 0, \quad 0 < \beta < 1$$

(b)

$$xu''(x) + u'(x) + xu(x) = 0$$