

Задачи по Квантовой Механике Осень 2015

Задание 1: Принцип суперпозиции, операторы и наблюдаемые

1. Оператор $\hat{A}^\dagger$, эрмитово сопряженный с оператором $\hat{A}$, определяется равенством

$$\int (\hat{A}\psi)^* \phi dr = \int \psi^* \hat{A}^\dagger \phi dr,$$

которое символически можно записать в виде

$$\langle \hat{A}\psi | \phi \rangle = \langle \psi | \hat{A}^\dagger \phi \rangle.$$

Сформулируйте это определение на языке матричного представления.

2. Состояние ψ меняется с течением времени согласно гамильтониану $\hat{H}$. Покажите, что средние значения операторов импульса $\hat{p}$ и координаты $\hat{x}$ удовлетворяют уравнениям

$$\frac{d}{dt} \langle \psi | \hat{x} | \psi \rangle = \langle \psi | \frac{\partial \hat{H}}{\partial \hat{p}} | \psi \rangle, \quad \frac{d}{dt} \langle \psi | \hat{p} | \psi \rangle = - \langle \psi | \frac{\partial \hat{H}}{\partial \hat{x}} | \psi \rangle.$$

3. В координатном представлении, волновая функция ψ имеет вид:

$$\psi(x) = C \exp \left(ipx - \frac{(x - x_0)^2}{2a^2} \right).$$

Найдите волновую функцию ψ в импульсном представлении.

4. По волновой функции, заданной в координатном представлении $\psi(x, y, z)$, найти вероятность нахождения частицы в интервалах значений z от z_1 до z_2 и p_y от p_1 до p_2 .
5. Рассмотрим частицу с гильбертовым пространством состояний, построенным на двух векторах $|\uparrow\rangle$ и $|\downarrow\rangle$ и наблюдаемые величины $\hat{\sigma}_x$, $\hat{\sigma}_y$, задаваемые соотношениями:

$$\hat{\sigma}_x |\uparrow\rangle = |\downarrow\rangle, \quad \hat{\sigma}_x |\downarrow\rangle = |\uparrow\rangle,$$

$$\hat{\sigma}_y |\uparrow\rangle = -i |\downarrow\rangle, \quad \hat{\sigma}_y |\downarrow\rangle = i |\uparrow\rangle.$$

Три таких частицы приготовлены в состоянии

$$\psi = \frac{|\uparrow\rangle_1 |\uparrow\rangle_2 |\uparrow\rangle_3 - |\downarrow\rangle_1 |\downarrow\rangle_2 |\downarrow\rangle_3}{\sqrt{2}}$$

Какие значения могут принимать наблюдаемые

$$\begin{aligned}\hat{O}_1 &= \hat{\sigma}_{x1} \hat{\sigma}_{y2} \hat{\sigma}_{y3}, \\ \hat{O}_2 &= \hat{\sigma}_{y1} \hat{\sigma}_{x2} \hat{\sigma}_{y3}, \\ \hat{O}_3 &= \hat{\sigma}_{y1} \hat{\sigma}_{y2} \hat{\sigma}_{x3}, \\ \hat{O}_4 &= \hat{\sigma}_{x1} \hat{\sigma}_{x2} \hat{\sigma}_{x3},\end{aligned}$$

измеренные в таком состоянии?

6. Гамильтониан системы $\hat{H}$ не зависит от времени и все его собственные значения не вырождены

$$\hat{H} |\nu\rangle = \hbar\omega_\nu |\nu\rangle.$$

В том же пространстве состояний определен оператор $\hat{A}$, собственные значения которого также не вырождены

$$\hat{A} |n\rangle = a_n |n\rangle.$$

Вначале система находится в некотором состоянии ν , затем в этой системе производят измерение наблюдаемой $\hat{A}$. Пусть в результате измерения получено значение этой наблюдаемой a_m . Чему равна вероятность обнаружить то же значение наблюдаемой $\hat{A}$, если произвести очередное измерение спустя время t ?