

Задачи по Квантовой Механике Осень 2015
Задание : Адиабатическое приближение

1. Рассмотрите частицу массы m в бесконечно глубокой потенциальной яме ширины a . Пусть ширина ямы a осциллирует со временем по закону

$$a(t) = a_0(1 - \alpha \sin^2(\omega t)),$$

с $\alpha < 1$. При каких условиях можно ожидать, что применимо адиабатическое приближение?

2. Рассмотрите одномерную частицу массы m с Гамильтонианом

$$\hat{H}(t) = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2 \hat{x}^2}{2} + \hat{x}f(t)$$

где

$$f(t) = f_0 e^{-t^2/\tau^2}.$$

Если τ достаточно велико, можно воспользоваться адиабатическим приближением. Разложите волновую функцию системы по мгновенным собственным векторам Гамильтониана $\hat{H}(t)$ и получите уравнения на коэффициенты разложения. Предполагая, что при $t \rightarrow -\infty$ система приготовлена в основном состоянии, найдите вероятности перехода p_{0n} в возбужденные состояния при $t \rightarrow \infty$ в первом неисчезающем порядке адиабатического приближения.

3. Две частицы с очень разными массами $M \gg m$ находятся в бесконечно глубокой потенциальной яме ширины a , взаимодействуя друг с другом как непроницаемые точки. Найдите низкоэнергетические уровни и соответствующие волновые функции.
4. Частица массы m находится между двумя бесконечными цилиндрами $|R_1 - R_2| \ll R_1 \sim R_2$ которые касаются друг друга внутренним образом. Найдите низколежащие энергетические уровни.
5. Частица находится в потенциале двух дельта-функциональных δ -ям, медленно приближающихся друг к другу:

$$U(x, t) = -\alpha \left[\delta \left(x - \frac{L(t)}{2} \right) + \delta \left(x + \frac{L(t)}{2} \right) \right].$$

При $t \rightarrow -\infty$ ямы находятся на бесконечном удалении друг от друга и частица локализована в одной из них. Со времени, $L(t)$ медленно уменьшается и в какой-то момент t_0 ямы сливаются:

$$U(x, t_0) = -2\alpha\delta(x).$$

Вычислите вероятность того, что частица останется в основном состоянии.

6. Квантовое состояние частицы, которая находится в квадратном ящике с непроницаемыми стенками, описывается двумя квантовыми числами n_x и n_y , которые могут быть произвольными натуральными числами. Первое возбужденное состояние дважды вырождено: $E_{12} = E_{21}$. Пусть состояние частицы в начальный момент времени есть:

$$\psi = \alpha\psi_{12} + \beta\psi_{21}.$$

Ящик медленно вращается на угол 2π так, что после вращения его новое положение совпадает с исходным. Найдите волновую функцию ψ после такого поворота.