

Задачи по Квантовой Механике Осень 2015
Задание 5: Квазиклассическое приближение

1. Рассмотрите уравнение Эйри

$$y'' - xy = 0. \quad (1)$$

- Выпишите два квазиклассических решения $w_{1,2}(x)$ уравнения (1), для $|x| \rightarrow \infty$.
- В комплексной плоскости переменной x , изобразите линии Стокса (где $w_{1,2}(x)$ растут или затухают без осцилляций при $|x| \rightarrow \infty$) и линии анти-Стокса (где $w_{1,2}(x)$ - чисто осциллирующие).
- Проверьте, что решение уравнения (1) может быть записано в виде:

$$\text{Ai}(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} dz e^{xz - \frac{z^3}{3}}. \quad (2)$$

Как следует выбрать контур γ , чтобы получить решение, затухающее при $x \rightarrow \infty$? Изобразите перевальный контур для интеграла в (2) при $|x| \rightarrow \infty$. Обратите внимание, что этот контур зависит от $\arg x$, опишите все возможные случаи.

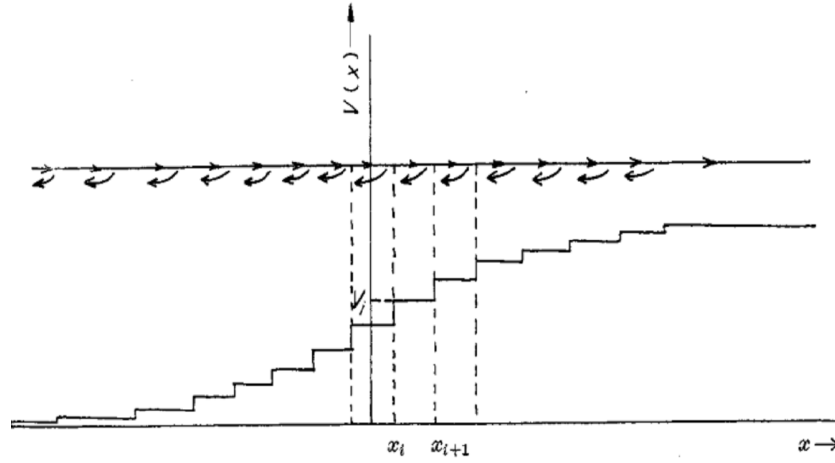
- Общее решение уравнения (1) может быть записано в виде

$$y(x) = b_1(x) w_1(x) + b_2(x) w_2(x),$$

где функции $b_{1,2}(x)$ стремятся к определенным предельным значениям при $|x| \rightarrow \infty$. Найдите эти значения для частного решения $y(x) = \text{Ai}(x)$. Обратите внимание, что они зависят от $\arg x$, опишите все возможные случаи.

2. Рассмотрите надбарьерное движение кусочным образом (см. рисунок ниже). Сшивая волновую функцию на границах ступенек и пренебрегая отражениями, покажите, что

$$\psi(x) \approx \left(\frac{p_1}{p(x)} \right)^{1/2} \exp \left(\frac{i}{\hbar} \int_0^x p(x') dx' \right).$$



3. Определите квазиклассические уровни энергии в потенциале:

$$U(x) = \frac{\hbar^2}{ma^2} (x/a)^{2n}.$$

4. Бесспиновые невзаимодействующие фермионы находятся в потенциальной яме:

$$U(x) = \begin{cases} \infty, & x < 0 \\ \alpha x, & x > 0 \end{cases}.$$

Определите зависимость Ферми-уровня E_F от количества частиц в яме N .

5. Найдите минимальное U_0 такое, что частица массы m обладает связанным состоянием в потенциале:

$$U(x) = \begin{cases} 0, & |x| > 2a \\ \left(2 - \frac{|x|}{a}\right)^2 V, & a < |x| < 2a \\ -U_0, & |x| < a \end{cases}$$

предполагая, что $V \gg \hbar^2/ma^2$.

6. В квазиклассическом приближении, вычислите вероятность туннелирования через потенциал $U(x) = -F|x|$.
7. Вычислите вероятность ионизации частицы в основном состоянии мелкой ямы $U_0 \ll \hbar^2/ma^2$ слабым электрическим полем E .