

Задачи по Квантовой Механике Осень 2015
Задание : 6-7

1. Найдите состояния рассеяния:

$$\psi(x < 0) = e^{ikx} + Re^{-ikx} \quad \psi(x > 0) = Te^{ikx} \quad (1)$$

на потенциале:

$$U(x) = -A\delta(x). \quad (2)$$

Волновые функции, отвечающие заданному значению энергии (1) делокализованы в пространстве, поэтому в таком представлении сложно увидеть временную последовательность событий, обычно связанную с рассеянием. Рассмотрите временную эволюцию волнового пакета, построенного из состояний k , близких $k_0 > 0$ с весом $f(k) \propto e^{-\alpha(k-k_0)^2}$, считая α большим. Вычислите асимптотическое поведение такой волновой функции при больших отрицательных x . Интерпретируйте полученный результат и вычислите 'время задержки' отраженной части волнового пакета.

2. Рассмотрите структуру с двумя барьерами, моделируя её следующим потенциалом:

$$V(x) = A(\delta(x+a) + \delta(x-a)). \quad (3)$$

Вычислите матрицу рассеяния как функцию энергии E . Вычислите кондактанс G такой структуры по формуле Ландауэра и постройте его как функцию энергии Ферми. Можно ли утверждать, что сопротивление $R = G^{-1}$ двух-барьерной структуры в два раза больше сопротивления одного барьера (то есть, справедлив ли закон сложения сопротивлений)?

3. Для одномерного движения найдите коэффициент отражения от барьера вида:

$$U(x) = U_0 e^{-|x|/a} \quad (4)$$

на энергии $E = U_0$, считая, что $U_0 \ll \frac{\hbar^2}{ma^2}$.

4. Вычислите точный коэффициент отражения от потенциала:

$$U(x) = \frac{U_0}{1 + e^{-x/a}} \quad (5)$$

предполагая, что энергия частицы больше максимального значения $U(x)$. Выясните, когда применим результат Борновского приближения, сравнивая точный результат с приближённым.

5. Рассмотрим надбарьерное отражение от потенциала:

$$U(x) = U_0 e^{-x^2/a^2}. \quad (6)$$

Для потенциала этого вида аналитическая формула для точного коэффициента отражения неизвестна. Вычислите коэффициент отражения в первых двух порядках теории возмущений и выясните область применимости Борновского приближения.

6. Найдите коэффициент отражения от перевёрнутого параболического потенциала ($E > 0$):

$$U(x) = -\frac{m\omega^2 x^2}{2}, \quad (7)$$

построив решение задачи рассеяния в виде контурного интеграла. Для этого: i) сведите уравнение Шредингера к уравнению с линейными коэффициентами, явно выделив асимптотику на больших расстояниях, ii) постройте решение найденного уравнения методом Лапласа, iii) вычислите асимптотику получившегося интеграла методом перевала и определите коэффициент отражения.