21. Demaret J, de Rop Y, Henneaux M *Int. J. Theor. Phys.* **28** 1067 (1989)
22. Kasner E *Am. J. Math.* **43** 217 (1921)
23. Damour T, Henneaux M *Phys. Rev. Lett.* **85** 920 (2000)
24. Damour T et al. *Phys. Lett. B* **509** 323 (2001)
25. Damour T, Henneaux M, Nicolai H *Class. Quantum Grav.* **20** R145 (2003)
26. Kac V G *Infinite Dimensional Lie Algebras* 3rd ed. (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1990)
27. Henneaux M, Persson D, Spindel P *Living Rev. Rel.* **11** (1) (2008); http://relativity.livingreviews.org/Articles/lrr-2008-1/
28. Damour T, Nicolai H *Int. J. Mod. Phys. D* **17** 525 (2008)
29. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Теория поля* (М.: Наука, 1988) [Landau L D, Lifshitz E M *The Classical Theory of Fields* (Oxford: Pergamon Press, 1975)]
30. Raychaudhuri A *Phys. Rev.* **98** 1123 (1955)
31. Raychaudhuri A *Phys. Rev.* **106** 172 (1957)
32. Komar A *Phys. Rev.* **104** 544 (1956)
33. Лифшиц Е М, Судаков В В, Халатников И М *ЖЭТФ* **40** 1847 (1961) [Lifshitz E M, Sudakov V V, Khalatnikov I M *Sov. Phys. JETP* **13** 1298 (1961)]
34. Khalatnikov I M, Lifshitz E M, Sudakov V V *Phys. Rev. Lett.* **6** 311 (1961)
35. Грищук Л П *ЖЭТФ* **51** 475 (1966) [Grishchuk L P *Sov. Phys. JETP* **24** 320 (1967)]
36. Arnold V I, Shandarin S F, Zeldovich Ya B *Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics* **20** 111 (1982)
37. Bini D, Cherubini C, Jantzen R T *Class. Quantum Grav.* **24** 5627 (2007)
38. Петров А З *Пространства Эйнштейна* (М.: ГИФМЛ, 1961) [Petrov A Z *Einstein Spaces* (Oxford: Pergamon Press, 1969)]
39. Белинский В А, Халатников И М *ЖЭТФ* **63** 1121 (1972) [Belinskii V A, Khalatnikov I M *Sov. Phys. JETP* **36** 591 (1973)]
40. Damour T "Cosmological singularities, billiards and Lorentzian Kac-Moody algebras", gr-qc/0412105
41. Belinski V "Cosmological singularity", arXiv:0910.0374
42. Kallosh R et al. *Phys. Rev. D* **66** 123503 (2002)
43. Alam U, Sahni V, Starobinsky A A *JCAP* (04) 002 (2003)
44. Misner C W, Thorne K S, Wheeler J A *Gravitation* (San Francisco: W.H. Freeman, 1973) [Мизнер Ч, Торн К, Уилер Дж *Гравитация* (М.: Мир, 1977)]
45. Толстой Л Н *Война и мир* (М.: ЭКСМО, 2008) [Tolstoy L *War and Peace* (Oxford: Oxford Univ. Press, 1983)]

PACS numbers: **01.65 + g, 02.30. – f, 03.65. – w**
DOI: 10.3367/UFNr.0180.201003i.0322

Поверх барьеров

(работы И.М. Халатникова о рассеянии частиц высоких энергий)

В.Л. Покровский

Сравнительно недавно, осенью 1957 г., мне выпала удача выступить на семинаре Ландау с докладом о работе по надбарьерному отражению частиц высоких энергий. Я тогда работал в Новосибирске, в Институте радиофизики, директором которого был один из моих учителей Ю.Б. Румер, познакомивший меня с Ландау. Моими соавторами были мои ровесники и друзья С.К. Саввиных и Ф.Р. Улинич [1, 2]. Отражение частиц с энергией, превосходящей высоту барьера, — сугубо квантовый эффект: классическая частица испытывает лишь замедление и ускорение вблизи вершины барьера. Мы решали уравнение Шрёдингера в квазиклассическом приближении, формально разлагая его в ряд по малому параметру λ/a, где λ — дебройлевская длина волны, a — характерный размер потенциала. Тонкость задачи, не замеченная другими теоретиками, работавшими над ней, состояла в том, что каждый последующий член ряда содержал сингулярность более высокого порядка, чем предыдущий, так что результативно они различались лишь универсальными численными факторами. Численный ряд удалось просуммировать, воспользовавшись точно решаемой задачей. Работа понравилась Ландау, и он поставил её на семинар. После семинара я познакомился со многими знаменитостями, которых до того знал лишь по публикациям и легендам. Но самый горячий интерес к работе проявил Исаак Маркович Халатников, предложивший лестное для меня сотрудничество. Свой интерес он объяснил поручением Ландау найти ошибку в работе Л. Шиффа на ту же тему. Объяснение звучало странно, так как ошибку мы уже нашли. Лишь потом я догадался, что на меня излилась горячая и совершенно бескорыстная симпатия И.М. ко всякому новичку-теоретику, появившемуся с интересной идеей, — свойство, которое сделало его впоследствии идеальным директором Института теоретической физики и позволило собрать в институте уникальную команду, быстро завоевавшую мировое признание. Я надеюсь, однако, что в наших отношениях был некоторый индивидуальный элемент, доказательством чему служит наша дружба и продолжительное научное сотрудничество, дотянувшееся до 1992 г. Наверное, оно могло продлиться и дольше, если бы его не прервали бурные события того времени. Наше быстрое сближение, необходимое для совместной работы, стало возможным благодаря другому редкостному качеству И.М.: полному отсутствию заносчивости и чинопочитания, простоте и спокойствию в общении.

Мы оба осознавали, что доложенная мною работа — только начало. Метод суммирования рядов, хотя он и привёл к красивому и нетривиальному результату, всё же был физически непрозрачным. Было непонятно, как обобщить его для сходных задач квантовой и классической механики. Размышляя об этом, мы пришли к следующей идее [3]. Классическая и квазиклассическая частица отражаются от точки поворота, в которой кинетическая энергия обращается в нуль. Если энергия частицы превосходит высоту барьера, то точка поворота отсутствует при любом вещественном значении координаты. Но она непременно появится в комплексной плоскости координаты, если потенциал является аналитической функцией. Выход в комплексную плоскость — довольно привычная операция в квантовой механике. Выход в комплексную плоскость импульса физически эквивалентен туннелированию, т.е. проникновению в область классически запрещённых координат. Подобно этому выход в комплексную плоскость координаты означает проникновение в область классически запрещённых импульсов. Таким образом, нужно найти подходящий путь в комплексной плоскости, вдоль которого волна доходит без отражения до комплексной точки поворота и сильно изменяется в её малой окрестности, а затем спуститься на вещественную ось и найти на ней отражённую волну. Практически эта программа была осуществлена, как показано на рис. 1. Путь начинается с вещественной оси координаты x при $x \to \infty$. В этой области, где потенциалом можно пренебречь, существует лишь прошедшая волна $\Psi \sim t \exp(ikx)$, где t — амплитуда прохождения. Путь далее поднимается в верхнюю комплексную полуплоскость до пересечения с

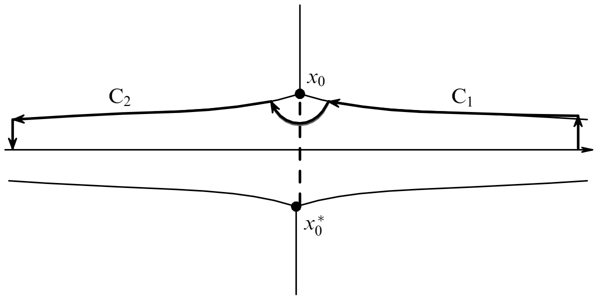

Рис. 1.

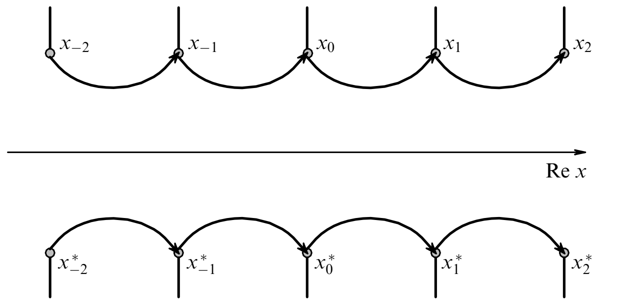

Рис. 2.

линией C_1, проходящей через ближайшую к вещественной оси точку поворота x_0, на которой квазиклассическое действие $S(x, x_0) = \int_{x_0}^{x} p(x')\,\mathrm{d}x'$, где $p(x) = [2m(E - V(x))]^{1/2}$, является чисто вещественным (такая линия называется антистоксовой). Линия C_1 на бесконечности идёт параллельно вещественной оси. На этой линии решение, с которого мы начали, осциллирует. С точностью до численного множителя оно даётся обычным квазиклассическим выражением: $\psi = A/\sqrt{p(x)}\exp[\mathrm{i}S(x, x_0)/\hbar]$. Как обычно, квазиклассика неприменима в малой окрестности точки поворота, но можно эту точку обойти снизу по достаточно большой дуге. При этом, однако, квазиклассическая экспонента возрастает вплоть до так называемой линии Стокса, на которой $S(x, x_0)$ становится чисто мнимым, а затем убывает и на её фоне появляется вторая экспонента со знаком минус перед $S(x, x_0)$. Происходит смена асимптотик, называемая явлением Стокса. В результате на второй антистоксовой линии C_2, проходящей через ту же точку поворота x_0 под углом $120°$ к линии C_1 и удовлетворяющей тому же условию вещественности $S(x, x_0)$, асимптотика волновой функции содержит две экспоненты:

$$\psi(x)\big|_{\mathrm{C}_2} = \frac{A}{\sqrt{p(x)}}\left\{\exp\left[\frac{\mathrm{i}S(x, x_0)}{\hbar}\right] - \mathrm{i}\exp\left[-\frac{\mathrm{i}S(x, x_0)}{\hbar}\right]\right\}. \tag{1}$$

Путь продолжается вдоль линии C_2 далеко влево, туда, где потенциалом снова можно пренебречь. На всём протяжении линии C_2 работает асимптотика (1) с двумя волнами, распространяющимися в противоположных направлениях с одинаковыми по модулю амплитудами. Таким образом, на комплексной линии C_2 исходная волна полностью отражается точкой поворота. Но когда путь спускается на вещественную ось при $x \to \infty$, одна из экспонент возрастает, а другая убывает. Модуль их отношения, равный с точностью до фазового множителя амплитуде отражения r, легко вычисляется:

$$|r| = \exp\left[-\frac{2}{\hbar}\,\mathrm{Im}\int_0^{x_0} p(x)\,\mathrm{d}x\right] = \exp\left[\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\int_{x_0^*}^{x_0} p(x)\,\mathrm{d}x\right]. \tag{2}$$

Этот результат показывает, что отражение не возникает ни в каком степенно́м порядке разложения по степеням $\hbar$ или отношения длины волны λ к характерному размеру потенциала a. Это экспоненциально малый эффект. Этим он напоминает другой сугубо квантовый эффект — туннелирование. Как и амплитуда туннелирования, амплитуда надбарьерного отражения содержит в экспоненте мнимое действие между двумя точками поворота, но последние, в отличие от таковых в случае туннелирования, находятся в комплексной плоскости координаты.

В 1960-е годы эта работа развивалась в основном советскими теоретиками. Несколько интересных работ было сделано А.М. Дыхне. В 1961 г. он рассмотрел движение квазиклассической частицы в периодическом потенциале [4]. Как известно, энергетический спектр в этом случае имеет зонную структуру, а волновые функции суть блоховские модулированные плоские волны. Аналогом надбарьерного отражения в этой проблеме является возникновение запрещённых зон при энергиях, превышающих максимум периодического потенциала. В этом случае частица отражается от системы периодически расположенных точек поворота x_n, как показано на рис. 2. Все они соединены антистоксовыми линиями. Дыхне обнаружил, что положение запрещённых зон даётся "боровским" правилом квантования $\int_{x_n}^{x_{n+1}} p(x)\,\mathrm{d}x = m\hbar$, а ширины запрещённых зон определяются коэффициентом надбарьерного отражения: $\Delta = \hbar\omega\exp\left(2\mathrm{i}/\hbar\int_{x_n^*}^{x_n} p(x)\,\mathrm{d}x\right)$. Зоны конечной, экспоненциально малой ширины появляются при энергиях, меньших максимума потенциала, вследствие туннелирования под барьерами. Результат Дыхне показывает, что в периодическом потенциале общего вида число запрещённых и разрешённых зон бесконечно. Между тем Дубровин и Новиков [5] показали, что для определённого класса потенциалов число зон конечно. Как разрешается это противоречие, до сих пор неясно. Потенциалы, приводящие к конечно-зонному спектру, являются эллиптическими двояко-периодическими функциями. Это означает, что точки поворота образуют регулярную решётку в комплексной плоскости с теми же периодами. По-видимому, отражение исчезает в результате интерференции на этой решётке, но эту гипотезу никто не проверял.

Дыхне применил тот же метод к решению задачи о переходах при пересечении двух уровней в комплексной плоскости времени [6, 7]. Та же проблема в случае, когда уровни пересекаются при действительном времени, известна как проблема (или теория) Ландау–Зинера [8, 9]. Это один из важнейших результатов нестационарной квантовой механики. Ландау и независимо Зинер рассмотрели нестационарную двухуровневую систему, описываемую гамильтонианом

$$H_{\mathrm{LZ}} = \begin{pmatrix} E_1(t) & \Delta \\ \Delta^* & E_2(t) \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Диагональные элементы гамильтониана (3) принято называть диабатическими уровнями, а величины $E_\pm = (E_1 + E_2)/2 \pm \left\{[(E_1 + E_2)/2]^2 + \Delta^2\right\}^{1/2}$, получающиеся в результате формальной диагонализации этого гамильтониана, — адиабатическими уровнями. Предполагается, что процесс происходит адиабатически за исключением короткого интервала времени вблизи момента пересечения диабатических уровней. Без потери общности можно принять этот момент за $t=0$. Далее, можно считать зависимость диабатических уровней от времени линейной. Наконец, можно принять, что $E_1=-E_2=\hbar\dot{\Omega}t/2$. Амплитуда выживания на одном из диабатических уровней, найденная Ландау и Зинером, имеет вид

$$A_{\mathrm{LZ}} = \exp\left(-\frac{2\pi\Delta^2}{\hbar^2\dot{\Omega}}\right). \tag{4}$$

Что происходит, если уровни не пересекаются на вещественной оси времени? После того, что было сказано выше, очевидно, что надо искать точку пересечения в комплексной плоскости времени и решать задачу вблизи неё. Такую постановку вопроса я предложил А.М. Дыхне в качестве затравки его кандидатской диссертации, но в решении этой задачи я не принимал участия. Решение было найдено Дыхне и одновременно Ландау, который обнаружил ошибку в первоначальном варианте решения Дыхне. Решение Ландау опубликовано в третьем и последующих изданиях *Квантовой механики* [10]. Ландау свёл эту задачу к задаче о надбарьерном отражении. Неудивительно, что результаты выглядят похожими. Амплитуда перехода с одного уровня на другой, найденная Дыхне и Ландау, такова:

$$A_{\mathrm{DL}} = \exp\left(\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\int_{t_0^*}^{t_0}\left[E_2(t)-E_1(t)\right]\mathrm{d}t\right), \tag{5}$$

где t_0 — точка пересечения уровней в комплексной плоскости времени. Обратите внимание на то, что в этом случае амплитуда перехода экспоненциально мала. Формула (5) получила в литературе название формулы Дыхне или Ландау – Дыхне. Из неё непосредственно следует формула Ландау – Зинера (4). Действительно, в принятых в этой теории предположениях $E_+(t)-E_-(t)=\left[(\hbar\Omega t)^2+4\Delta^2\right]^{1/2}$ и $t_0=\mathrm{i}2\Delta/\hbar\dot{\Omega}$. Интегрирование в экспоненте формулы (5) идёт вдоль мнимой оси и немедленно приводит к формуле (4).

К этой задаче примыкает задача об изменении адиабатического инварианта в классической механике. Известно, что при медленном изменении гамильтониана приближённо сохраняется классическое действие за период, которое и является адиабатическим инвариантом. Какова точность этого приближённого закона сохранения? Ответ зависит от интервалов времени, в течение которых действует возмущение и производится наблюдение. В наиболее простом случае, когда возмущение достаточно быстро стремится к нулю при $t\to\pm\infty$, а наблюдение происходит при тех временах, когда возмущением можно пренебречь, изменение адиабатического инварианта, впервые найденное Дыхне, можно достаточно просто связать с задачей Дыхне – Ландау, по крайней мере, в случае одномерного движения. Как известно, в квазиклассике действие за период квантуется с периодом $2\pi\hbar$. С точностью до этого множителя действие совпадает с номером уровня n. На квантовом языке изменение адиабатического инварианта означает переход с одного уровня на другой. Величина этого изменения $\Delta I = 2\pi\hbar\sum_{n'}(n'-n)\,w_{n,n'}$, где $w_{n,n'}$ означает вероятность перехода с уровня n на уровень n'. В адиабатическом режиме наиболее вероятны переходы на ближайшие уровни, $n'-n=\pm1$, остальные переходы имеют гораздо меньшую вероятность. Ввиду медленной зависимости $w_{n,n+1}$ от n получаем [6, 7, 11]

$$\Delta I = \frac{\mathrm{d}w_{n,n+1}}{\mathrm{d}n} = \mathrm{i}\hbar\int_{t_0^*}^{t_0}\frac{\partial\omega}{\partial I}\,\mathrm{d}t\,\exp\left[2\mathrm{i}\int_{t_0^*}^{t_0}\omega(t)\,\mathrm{d}t\right], \tag{6}$$

где ω — частота классического движения, медленно зависящая от времени. Изменение адиабатического инварианта оказывается экспоненциально малой величиной. Однако, если измерение производится в течение конечного и не экспоненциально большого времени, то изменение адиабатического инварианта оказывается гораздо бóльшим. Оно осциллирует во времени, одновременно убывая по закону $1/t$, как и вероятности переходов. Это обстоятельство, которое было неизвестно в то время, приводило к расхождению с результатами эксперимента.

Более общая ситуация с несколькими периодическими движениями была исследована А.А. Слуцкиным в рамках классической механики. Изложение работы Слуцкина можно найти в последних изданиях *Механики* Ландау и Лифшица [12] в трактовке Л.П. Питаевского.

Трёхмерное обобщение задачи о надбарьерном отражении было проведено в цикле работ [13 – 16] Паташинского, Покровского и Халатникова, опубликованных в 1962 – 1964 гг. Эти работы были начаты ещё при научной жизни Ландау и многократно с ним обсуждались. Тогда Халатников и я изобрели полюсы амплитуды рассеяния в комплексной плоскости моментов, ещё не получившие названия полюсов Редже. Орешек, однако, оказался столь твёрдым, что закончить эту работу нам удалось лишь несколько лет спустя с участием Саши Паташинского. Постановка вопроса была следующая. Классическая механика допускает рассеяние в определённый конус углов. Квантовая механика таких ограничений не знает. Какова амплитуда квазиклассического рассеяния на классически запрещённый угол? В классической механике каждому доступному углу рассеяния θ соответствует некоторое прицельное расстояние ρ. Следуя тому же ходу мыслей, что и в случае надбарьерного отражения, можно прийти к заключению: рассеянию на классически запрещённый угол должно соответствовать комплексное прицельное расстояние. Обычно квазиклассическое приближение в теории рассеяния получается с помощью преобразования Ватсона формулы Факсена – Хольцмарка для амплитуды рассеяния:

$$f(\theta) = \frac{1}{2\mathrm{i}k}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\exp\left(2\mathrm{i}\delta_l\right)P_l(\cos\theta) = -\frac{1}{2\mathrm{i}k}\int_\Gamma \nu S(\nu)\,P_{\nu-1/2}(-\cos\theta)\,\frac{\mathrm{d}\nu}{\cos\nu\pi}\,. \tag{7}$$

Контур интегрирования Γ изображён на рис. 3. Его нужно, если возможно, деформировать так, чтобы он прошёл через точку перевала в направлении скорейшего спуска. Значение ν в точке перевала и является с точностью до множителя прицельным расстоянием ($\rho=\nu/k$), соответствующим углу рассеяния θ. Свободной деформации контура мешают полюсы функции $S(\nu)$, так что в некоторой области параметров вклад полюсов доминирует в амплитуде рассеяния и представление о

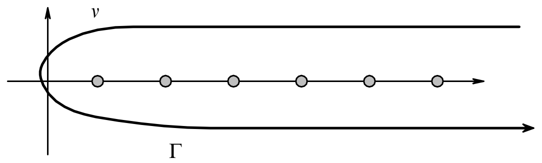

Рис. 3.

комплексном прицельном расстоянии, зависящем от угла рассеяния, оказывается неправильным. Детальное описание результатов неуместно в этом кратком сообщении. Можно, однако, показать, как возникают полюсы в амплитуде рассеяния. Функция $S(v)$ определяется через асимптотику радиальной волновой функции

$$R_{v-1/2}(r) \sim \frac{1}{r}\left\{A(v)\exp\left[\mathrm{i}\left(kr-\left(v-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right)\right]- - B(v)\exp\left[-\mathrm{i}\left(kr-\left(v-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right)\right]\right\}$$

как $S(v) = A(v)/B(v)$. Полюс появляется, когда $B(v) = 0$. Рассмотрим, как ведёт себя радиальная волновая функция в комплексной плоскости r. На рисунке 4а показаны типичные антистоксовские линии, проходящие через ближайшую к вещественной оси точку поворота r_1. Радиальная волновая функция убывает вблизи начала координат, т.е. имеет всего одну экспоненту $R = \exp(\mathrm{i}S(r, r_1)/\hbar)$ в секторе слева от точки поворота. Переходя на правую антистоксовскую линию, она приобретает вторую экспоненту $R = \exp(\mathrm{i}S(r, r_1)/\hbar) - \mathrm{i}\exp(-\mathrm{i}S(r, r_1)/\hbar)$, коэффициент которой остаётся неизменным при $r \to +\infty$. Это означает, что $B(v) \neq 0$ и $S(v)$ не имеет полюса. Полюс появится при значении v, которое определяется двумя условиями: 1) вторая точка поворота r_2 появляется на той же антистоксовой линии (рис. 4б); 2) действие между двумя точками поворота подчиняется правилу Бора $S(r, r_1) = n\pi\hbar$. При этом условии вторая экспонента исчезает после прохождения второй точки поворота.

В последовавший довольно длительный период деятельность в этой области почти угасла и упомянутые работы цитировались редко. Интерес к ним неожиданно возобновился в конце 1980-х – начале 1990-х годов в связи с появлением и развитием новых областей физики и математики. В физике это была теория формообразования, в частности дендритного роста кристаллов, и теория движения границы между вязкой и идеальной жидкостями, заключёнными между двумя параллельными пластинами (течение Хеле-Шоу). Новая математическая наука носит название "асимптотика за пределами всех порядков" (имеется в виду теория возмущений). Среди учёных, внёсших значительный вклад в эти новые области следует упомянуть М. Крускала, М. Берри, Дж. Бойда, Дж. Лангера, Г. Сегура, Г. Левина, Х. Мюллера-Крумбхаара, С. Танвеера, Б. Шраймана, Д. Бенсимона, М. Минеева, В. Мельникова, Е. Бреннера, П. Вигмана. Первый важный шаг был сделан Крускалом и Сегуром в работе, посвящённой дендритному росту кристаллов [17], в которой наш метод впервые был распространён на нелинейную проблему. Деятельность эта актуальна и в настоящее время. Кроме оригинальных работ, опубликовано множество сборников статей, обзоров и монографий. Я приведу ссылки на две из них. Первая — это сборник статей [18] под названием *Asymptotics beyond all orders*, изданный в 1991 г., содержащий ряд авторитетных обзоров по упомянутым проблемам. Вторая — это монография Д. Бойда *Weakly nonlocal solitary waves and Beyond-All-Orders Asymptotics* [19], опубликованная в 1999 г. Хотя название этой книги выглядит более специальным, чем предыдущей, она содержит подробное и ясное изложение общих методов и описание смежных областей, так что её можно рекомендовать для первоначального ознакомления с проблемой. С разрешения автора я приведу некоторые выдержки из этой книги, относящиеся к нашей работе 1961 г.

Наш метод Бойд называет "сшивание асимптотик в комплексной плоскости" и характеризует его как весьма общий, применимый к большому числу разных задач. Вот что он пишет во введении соответствующей главы (перевод мой):

"Первое применение сшивания асимптотик было дано Покровским и Халатниковым (1961), которые обобщили теорию ВКБ для расчёта экспоненциально малого отражения волны от потенциального барьера, высота которого всюду меньше, чем энергия волны. Крускал и Сегур (1985, 1991) применили эти идеи к нелинейным явлениям: росту дендритных пальцев на границе твёрдого тела и жидкости. Позднее Сегур и Крускал (1987) и Помо, Рамани и Грамматикос (1988) применили этот метод к уединённым волнам. С тех пор метод обрёл множество других применений. Наиболее известным является исследование Акиласом и Гримшоу (1992) нелокальных высших мод солитонов внутренней гравитации. Гримшоу и Джоши (1995) получили поправки высшего порядка к результатам Помо и др. (1988)".

При описании нашей работы 1961 г. Бойд намеренно употребляет весьма расплывчатую, но зато чрезвычайно общую терминологию. Чтобы охарактеризовать её, достаточно взглянуть на рис. 5, которым он заменяет наш более точный рис. 1. Все подробности опущены, оставлена лишь общая идея движения с известным решением от одной бесконечности к комплексной точке поворота, а затем от неё с другим известным решением на другую бесконечность. В ещё более абстрактной форме метод сшивания асимптотик представлен на

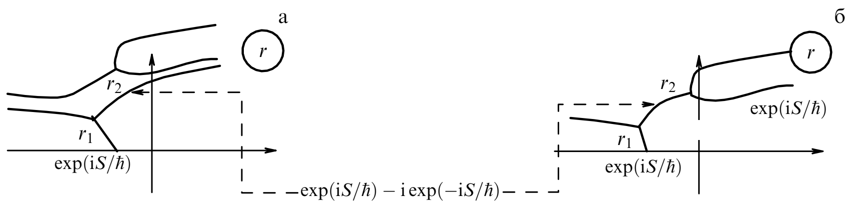

Рис. 4.

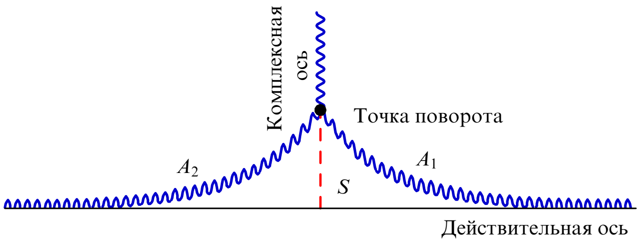

Рис. 5.

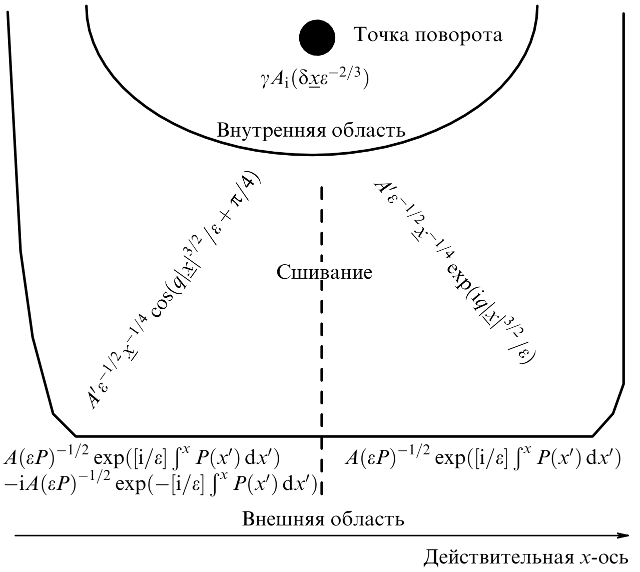

Рис. 6.

рис. 6. Здесь обозначены некая внешняя область, в которой ищется асимптотика решения, две примыкающие области, в которых асимптотики известны с точностью до нескольких констант, разделённые линией смены асимптотик (стоксова линия), и внутренняя область в комплексной плоскости, в которой асимптотики недействительны. Необходимо научиться решать задачу во внутренней области. Обычно оказывается возможным воспользоваться близостью этой области к определённой точке, в которой грубо нарушается коротковолновое приближение (аналог точки поворота в классической механике), и решить внутреннюю задачу, если не аналитически, то численно, а затем сшить с двумя разными асимптотиками в примыкающих областях. В такой форме метод годится и для нелинейных проблем, в которых известны различного типа волновые решения, например солитоны, автомодельные решения, ударные волны и т.п. Кроме рассмотрения уже обсуждавшейся задачи о надбарьерном отражении, Бойд иллюстрирует общий метод оригинальным решением задачи о движении маятника под действием силы, медленно зависящей от времени. Соответствующее уравнение движения имеет вид

$$u_{tt} + u = f(\varepsilon t)\,, \tag{8}$$

где ε — малый параметр. Пусть при $x < 0$ решение ведёт себя как $f(\varepsilon t)$. При $x > 0$ оно будет отличаться на решение однородного уравнения: $u(t \to +\infty) = f(\varepsilon t) + c \sin t$. Для того чтобы найти константу c, нужно решить задачу в окрестности полюса функции $f(x)$ и сшить две асимптотики u с решением во внутренней области. Задача решалась для случая, в котором особенностью $f(x)$ является полюс второго порядка в точке x_s. Функция $f(x)$ во внутренней области заменяется функцией $(x - x_s)^{-2}$, и решение получившегося из (8) стандартного уравнения для $U = \varepsilon^2 u$, именно $U_{tt} + U = (t - x_s/\varepsilon)^{-2}$, оказывается так называемым борелевским логарифмом $U(\tau) = \mathrm{Bo}(\tau) = \int_0^\infty \exp(-s)\, \ln(1 + s^2/\tau^2)\, \mathrm{d}s$; $\tau = t - x_s/\varepsilon$. Когда τ меняет знак, обходя начало координат, к борелевскому логарифму добавляется слагаемое $2\pi\mathrm{i} \exp(-\mathrm{i}\tau)$. Сшивая это решение с указанными асимптотиками в области $1 < \tau < 1/\varepsilon$ и спускаясь затем на вещественную ось t, находим $c = (2\pi/\varepsilon^2) \exp(\mathrm{i} x_s/\varepsilon)$. Это, как и следовало ожидать, экспоненциально малая величина. Удивительным образом решение этой линейной задачи оказалось ключом к решению гораздо более сложной нелинейной задачи об изменении солитона уравнения Кортевега – де Вриза с добавленной пятой производной при медленном распространении одного конца прямой на другой (Помо и др. [20]). Решение слишком громоздко, и описать его кратко трудно, но сама формулировка проблемы даёт представление о классе задач, решаемых методом сшивания асимптотик.

Я воспроизвожу заимствованные из той же книги Бойда таблицы, в которых собрана информация о классе задач, не включающих в себя солитоны, в которых возникают экспоненциально малые эффекты, локализующиеся в комплексной плоскости (табл. 1, 2). Ко многим из них применим метод сшивания асимптотик. Разнообразие явлений, объединяемых сходной математической структурой, поразительно. Здесь и чистая математика, и гидродинамика, и метеорология, и теория твёрдого тела, и квантовая механика. Я думаю, что многое ещё предстоит открыть.

Таблица 1. Неразрешённые неквантовые эффекты экспоненциальной малости

Явление	Область применения	Литература
Дендритный рост кристаллов	Конденсированная среда	Kessler, Koplik & Levine (1988)
Формирование вязкого "пальца" (Задача Саффмана – Тейлора)	Динамика жидкости	Shraiman (1986), Hong & Langer (1986), Combescot et al. (1986), Tanveer (1990, 1991)
Диффузионное слияние фронтов Экспоненциальные течения	Системы "реакция – диффузия"	Carr (1992), Hale (1992), Carr & Pego (1989), Fusco & Hale (1989), Laforgue & O'Malley (1994, 1995), Reyna & Ward (1994, 1995), Ward & Reyna (1995)

Таблица 1 (продолжение)

Явление	Область применения	Литература
Явление Стокса в асимптотических разложениях	Прикладная математика	Dingle (1973), Berry (1989, 1995), Berry & Howls (1990, 1991, 1993, 1994), Olver (1974, 1991, 1993), Olde Daalhuis (1992), Paris & Wood (1992), Paris (1992), Howls (1997), Jones (1997)
Движение маятника под действием "быстрой" силы	Классическая физика	Chang (1991), Scheurle et al. (1991)
Резонансные всплески жидкости в резервуаре	Механика жидкости	Byatt-Smith & Davie (1991)
Ламинарное течение в пористых трубках	Механика жидкости Космическая плазма	Berman (1953), Robinson (1976), Terril (1965, 1973), Terril & Thomas (1969), Grundy & Allen (1994)
Поток Джеффри – Гамеля Неподвижные точки	Граничный слой высокого порядка	Bulakh (1964)
Ударные волны в сопле	Механика жидкости	Adamson & Richey (1973)
Медленное вязкое обтекание окружности и сферы	Механика жидкости (логарифмические и степенные ряды)	Proudman & Pearson (1957), Chester & Breach (1969), Skinner (1975), Kropinski & Ward & Keller (1995)
Неустойчивость экваториальной волны Кельвина	Метеорология, океанография	Boyd & Christidis (1982, 1983), Boyd & Natarov (1998)
Ошибка: правило средней точки	Численный анализ	Hildebrand (1974)
Утечка излучения из волоконно-оптических волноводов	Нелинейная оптика	Kath & Kriegsmann (1988), Paris & Wood (1989)
Каналирование частиц в кристаллах	Физика конденсированного состояния	Dumas (1991)
Захваченные островами волны	Океанография	Lozano & Meyer (1976), Meyer (1980)
Всплывающие пузыри	Физика жидкости	Vanden-Broeck (1984, 1986, 1988, 1992)
Возникновение хаоса	Физика	Holmes, Marsden & Scheurle (1988)
Разделение сепаратрис	Прикладная математика	Hakim & Mallick (1993)
Медленные потоки в геофизических жидкостях	Метеорология, океанография	Lorenz & Krishnamurthy (1987), Boyd (1994), Camassa (1995)

Таблица 2. Некоторые примеры экспоненциально малых квантовых эффектов

Эффект	Область применения	Литература
Энергия двойной квантовой ямы (H_2^+ и т.д.)	Атомная физика, квантовая химия	Fröman (1966), Cizek et al. (1986)
Мнимая часть собственного значения метастабильного квантового состояния: эффект Штарка (внешнее электрическое поле)	Атомная физика, квантовая химия	Oppenheimer (1928), Reinhardt (1982), Hinton & Shaw (1985), Benassi et al. (1979)
(Im E): кубический ангармонизм	Квантовая химия	Alvarez (1988)
(Im E): квадратичный эффект Зеемана (внешнее магнитное поле)	Атомная физика, квантовая химия	Cizek and Vrscay (1982)
Вероятность перехода в двухуровневой системе (экспоненциально мала при малой скорости изменения уровней)	Квантовая механика	Berry & Lim (1993)
Сверхосцилляции в интегралах Фурье, квантовые бильярды и т.д.	Прикладная математика, квантовая электродинамика	Berry (1994)
Ширина устойчивой полосы для уравнения Хилла	Квантовая физика, астрономия	Weinstein and Keller (1985, 1987)
Надбарьерное рассеяние	Квантовая физика	Pokrovskii & Khalatnikov (1961)

Надеюсь, что это краткое сообщение вновь возбудит интерес И.М. к этому кругу вопросов. По моим наблюдениям, его интерес к науке и научная активность нисколько не ослабели.

Список литературы

1. Покровский В Л, Саввиных С К, Улинич Ф Р *ЖЭТФ* **34** 1272 (1958) [Pokrovskii V L, Savvinykh S K, Ulinich F R *Sov. Phys. JETP* **7** 879 (1958)]
2. Покровский В Л, Саввиных С К, Улинич Ф Р *ЖЭТФ* **34** 1629 (1958) [Pokrovskii V L, Savvinykh S K, Ulinich F R *Sov. Phys. JETP* **7** 1119 (1958)]
3. Покровский В Л, Халатников И М *ЖЭТФ* **40** 1713 (1961) [Pokrovskii V L, Khalatnikov I M *Sov. Phys. JETP* **13** 1207 (1961)]
4. Дыхне А М *ЖЭТФ* **40** 1423 (1961) [Dykhne A M *Sov. Phys. JETP* **13** 999 (1961)]
5. Дубровин Б А, Новиков С П *ЖЭТФ* **67** 2131 (1974) [Dubrovin B A, Novikov S P *Sov. Phys. JETP* **40** 1058 (1974)]
6. Дыхне А М *ЖЭТФ* **38** 570 (1960) [Dykhne A M *Sov. Phys. JETP* **11** 411 (1960)]
7. Дыхне А М *ЖЭТФ* **41** 1324 (1961) [Dykhne A M *Sov. Phys. JETP* **14** 941 (1962)]
8. Landau L D *Phys. Z. Sowjetunion* **2** 46 (1932)
9. Zener C *Proc. R. Soc. Lond. A* **137** 696 (1932)
10. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Квантовая механика*: *Нерелятивистская теория* 3-е изд. (М.: Наука, 1974) [Landau L D, Lifshitz E M *Quantum Mechanics: Non-Relativistic Theory* 3rd ed. (Oxford: Pergamon Press, 1977)]
11. Дыхне А М, Покровский В Л *ЖЭТФ* **39** 373 (1960) [Dykhne A M, Pokrovskij V L *Sov. Phys. JETP* **12** 264 (1961)]
12. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Механика* (М.: Наука, 1982) [Landau L D, Lifshitz E M *Mechanics* (Oxford: Pergamon Press, 1976)]
13. Паташинский А З, Покровский В Л, Халатников И М *ЖЭТФ* **43** 1117 (1962) [Patashinskii A Z, Pokrovskii V L, Khalatnikov I M *Sov. Phys. JETP* **16** 788 (1963)]
14. Паташинский А З, Покровский В Л, Халатников И М *ЖЭТФ* **44** 2062 (1963) [Patashinskii A Z, Pokrovskii V L, Khalatnikov I M *Sov. Phys. JETP* **17** 1387 (1963)]
15. Паташинский А З, Покровский В Л, Халатников И М *ЖЭТФ* **45** 760 (1963) [Patashinskii A Z, Pokrovskii V L, Khalatnikov I M *Sov. Phys. JETP* **18** 522 (1964)]
16. Паташинский А З, Покровский В Л, Халатников И М *ЖЭТФ* **45** 989 (1963) [Patashinskii A Z, Pokrovskii V L, Khalatnikov I M *Sov. Phys. JETP* **18** 683 (1964)]
17. Kruskal M D, Segur H "Asymptotics beyond all orders in a model of crystal growth", Technical Reports 85-25 (Princeton: Aeronautical Research Associates, 1985); *Study App. Math.* **85** 129 (1991)
18. Segur H, Tanveer S, Levine H (Eds) *Asymptotics Beyond All Orders* (New York: Plenum Press, 1991)
19. Boyd J P *Weakly Nonlocal Solitary Waves and Beyond-All-Orders Asymptotics*: *Generalized Solitons and Hyperasymptotic Perturbation Theory* (Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1998)
20. Pomeau Y, Ramani A, Grammaticos B *Physica D* **31** 127 (1988)

PACS numbers: 11.10.Gh, **11.15.–q**, **12.38.–t**
DOI: 10.3367/UFNr.0180.201003j.0328

Экранирование и антиэкранирование заряда в калибровочных теориях

И.Б. Хриплович

В докладе на качественном уровне обсуждается перенормировка заряда в векторных теориях с абелевой и неабелевой калибровочной группой.

1. Начало обсуждаемым исследованиям положила замечательная работа Ландау, Абрикосова и Халатникова [1], появившаяся более полувека назад. В ней было показано, в частности, что в квантовой электродинамике наблюдаемый заряд электрона e связан с его затравочным зарядом e_0 соотношением

$$e^2 = e_0^2 \left(1 + \frac{e_0^2}{12\pi^2} \ln \frac{\Lambda^2}{m^2} \right)^{-1} < e_0^2 \,, \tag{1}$$

здесь m — масса электрона, Λ — параметр обрезания расходящихся интегралов (разумеется, $\Lambda \gg m$). Это и остальные соотношения, обсуждаемые здесь, приводятся в старшем логарифмическом приближении, т.е. в коэффициенте при заданной степени константы связи (последняя по предположению мала) удерживается лишь старшая степень большого логарифма.

Тот факт, что наблюдаемый заряд оказывается меньше затравочного, — вполне естественное и наглядное следствие поляризации вакуума: затравочный заряд притягивает к себе виртуальные частицы с зарядом противоположного знака и отталкивает виртуальные частицы с тем же знаком заряда (рис. 1).

С другой стороны, как нетрудно показать, неравенство (1) столь же естественным образом вытекает из дисперсионного соотношения для поляризационного оператора в сочетании с условием унитарности: согласно этому условию мнимая часть поляризационного оператора фотона положительно определена, $\mathrm{Im}\,\Pi > 0$.

Это результат на все времена в квантовой электродинамике.

2. Однако спустя 11 лет Ваняшин и Терентьев [2], исследуя вклад заряженной векторной частицы в нелинейный лагранжиан постоянного электромагнитного поля, обнаружили, что вклад этой частицы (при гиромагнитном отношении $g = 2$) в перенормировку заряда совершенно иной:

$$e^2 = e_0^2 \left(1 - \frac{7e_0^2}{12\pi^2} \ln \frac{\Lambda^2}{m^2} \right)^{-1} > e_0^2 \,. \tag{2}$$

Другими словами, в электродинамике векторной частицы возникает антиэкранирование заряда. Но как же быть с простыми качественными соображениями, приведёнными выше? В чём разница между электроном со спином $s = 1/2$ и W-бозоном с $s = 1$?

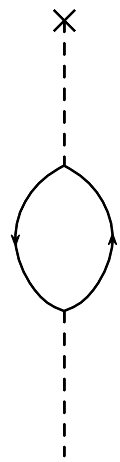

Рис. 1. Поляризация вакуума в квантовой электродинамике.