

Midterm

22 октября 2016 г.

Задача 1 Рассмотрим газ из N тождественных частиц — бозонов — взаимодействующих точечным образом. В таком случае волновая функция имеет вид $\psi(x_1, \dots, x_N)$ и она является симметричной по отношению к произвольным перестановкам координат. Такая система описывается следующим гамильтонианом:

$$\hat{H} = \sum_i \frac{\hat{p}_i^2}{2m} + V \sum_{i < j} \delta(x_i - x_j)$$

Пусть число частиц $N = 3$, и между ними имеется притяжение $V < 0$. Покажите, что задача допускает следующий *анзац*:

$$\psi(x_1, x_2, x_3) = \exp(-\kappa|x_1 - x_2| - \kappa|x_2 - x_3| - \kappa|x_1 - x_3|)$$

При каком κ такая волновая функция является собственной для гамильтониана? Какова энергия такого состояния? Соответствует ли это основному состоянию?

Задача 2 Частицы с энергией E налетают слева на треугольный потенциальный барьер:

$$U(x) = \begin{cases} U_0 - Fx, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Общее решение при $x > 0$ выражается через функции $\text{Ai}(z)$ и $\text{Bi}(z)$. Какая их линейная комбинация соответствует прошедшей волне? Чему равен поток частиц в этой волне? Определите вероятность туннелирования при $U_0 - E \gg \sqrt[3]{F^2/m}$ (энергия при этом $E < U_0$).

Задача 3 В потенциальный ящик с непроницаемыми стенками помещена тяжёлая частица массы M ; а слева и справа от неё находятся лёгкие частицы массы $m \ll M$, для которых тяжёлая частица является непроницаемой. Определите низколежащие уровни энергии такой системы.

Задача 4 Частица находится в связанном состоянии мелкой ямы $U(x) = -\frac{\kappa}{m}\delta(x - x_0)$. В некоторый момент времени яму начинают «трясти» по закону $x_0(t) = a \cdot \cos \omega t$. Считая амплитуду колебаний a маленькой, определите вероятность ионизации ямы в единицу времени.

Задача 5 Заряженная бусинка массы m и заряда e может свободно перемещаться по кольцу радиуса R . Параллельно плоскости кольца прикладывается постоянное электрическое поле $\mathcal{E}$. Определите низколежащие уровни энергии для случая слабых и сильных электрических полей.

Задача 6 Спин-1/2 находится в магнитном поле $\mathbf{B}$, которое медленно вращается в плоскости yz :

$$\hat{H} = -\mu \mathbf{B} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}, \quad \mathbf{B}(t) = B \cdot \left(0, \frac{1}{\cosh \omega t}, -\tanh \omega t \right),$$

и $\omega \ll \mu B$. В начальный момент времени $t \rightarrow -\infty$ спин и магнитное поле направлены по оси z . Найдите в первом исчезающем порядке вероятность того, что спин останется направленным вдоль оси z после завершения вращения при $t \rightarrow \infty$.

Справочные данные

Вам может пригодиться значение следующего интеграла:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\alpha z}}{\cosh z} dz = \frac{\pi}{\cosh \frac{\pi\alpha}{2}}$$

Функции Эйри Общее решение дифференциального уравнения $y''(x) - xy(x) = 0$ представляет собой произвольную линейную комбинацию функций Эйри первого и второго рода $\text{Ai}(x)$ и $\text{Bi}(x)$. Вам могут пригодиться их асимптотики:

$$\text{Ai}(x) \approx \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{\pi}x^{1/4}} \exp\left(-\frac{2}{3}x^{3/2}\right) & x \rightarrow +\infty \\ \frac{1}{\sqrt{\pi}|x|^{1/4}} \sin\left(\frac{2}{3}|x|^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right), & x \rightarrow -\infty \end{cases}, \quad \text{Bi}(x) \approx \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{\pi}x^{1/4}} \exp\left(\frac{2}{3}x^{3/2}\right), & x \rightarrow +\infty \\ \frac{1}{\sqrt{\pi}|x|^{1/4}} \cos\left(\frac{2}{3}|x|^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right), & x \rightarrow -\infty \end{cases}$$

Матрицы Паули

$$\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$