Задачи к семинару «Основы квантовой механики»

10 сентября 2016 г.

Упражнения (10 баллов)

1. Пусть $\hat{L}$ — произвольный оператор. Покажите, что $\hat{L}\hat{L}^\dagger$ и $\hat{L}^\dagger\hat{L}$ — неотрицательно определённые операторы.
2. Пусть $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ — произвольные операторы. Выразите $[\hat{A},\hat{B}\hat{C}]$ и $[\hat{A}\hat{B},\hat{C}]$ через $[\hat{A},\hat{B}]$, $[\hat{B},\hat{C}]$ и $[\hat{C},\hat{A}]$.
3. Состояние трёхмерной частицы описывается волновой функцией $\psi(x,y,z)$. Какова вероятность того, что частица находится в интервале $z_1 < z < z_2$, а импульс находится в интервале $p_1 < p_y < p_2$?

Задачи (90 баллов)

Задача 1. Соотношение неопределённостей Гейзенберга (10 баллов) Пусть $\hat{A}$, $\hat{B}$ — эрмитовы операторы, и $[\hat{A},\hat{B}] = i\hat{C}$; и пусть система описывается некоторой волновой функцией $|\psi\rangle$.

1. Покажите, что $\hat{C}$ в таком случае тоже является эрмитовым оператором.
2. Пусть α, a и b — произвольные параметры. Постройте оператор $\hat{L} = \alpha(\hat{A}-a)+i(\hat{B}-b)$; используя результат первого упражнения, покажите, что $\left(\left\langle \hat{A}^2\right\rangle - \left\langle \hat{A}\right\rangle^2\right)\cdot\left(\left\langle \hat{B}^2\right\rangle - \left\langle \hat{B}\right\rangle^2\right) \geq \frac{1}{4}\left\langle \hat{C}\right\rangle^2$.
3. К чему приводит это соотношение для операторов координаты и импульса?

Задача 2. Гауссов волновой пакет. (15 баллов) Пусть волновая функция $|\psi\rangle$ в координатном представлении имеет вид:

$$\psi(x) = \langle x|\psi\rangle = \exp\left(\frac{ip_0x}{\hbar} - \frac{(x-x_0)^2}{2a^2}\right)$$

Вычислите эту волновую функцию в импульсном представлении $\psi(p) = \langle p|\psi\rangle$. Найдите среднее значение $\langle\hat{x}\rangle$, $\langle\hat{p}\rangle$, а также дисперсию $\Delta x^2 = \left\langle\hat{x}^2\right\rangle - \langle\hat{x}\rangle^2$ и $\Delta p^2 = \left\langle\hat{p}^2\right\rangle - \langle\hat{p}\rangle^2$. Проверьте выполнение соотношения неопределённостей Гейзенберга $\Delta x\cdot\Delta p \geq \hbar/2$ для этой волновой функции.

Задача 3. Теорема Эренфеста. (10 баллов) Пусть классическая функция Гамильтона одномерной частицы имеет вид $H(p,x) = \epsilon(p) + U(x)$ (к примеру, $\epsilon(p) = \frac{p^2}{2m}$); квантовый же гамильтониан имеет вид $\hat{H} = H(\hat{p},\hat{x})$. Покажите, что средние значения координаты и импульса удовлетворяют квантовым аналогам уравнений Гамильтона (тут $\langle\ldots\rangle = \langle\psi(t)|\ldots|\psi(t)\rangle$).

$$\frac{d}{dt}\langle\hat{x}\rangle = \left\langle\frac{\partial\hat{H}}{\partial p}\right\rangle, \quad \frac{d}{dt}\langle\hat{p}\rangle = -\left\langle\frac{\partial\hat{H}}{\partial x}\right\rangle$$

Задача 4. Переходы под действием периодического возмущения (25 баллов) Рассмотрите молекулу аммиака. В нулевой момент времени к системе прикладывается слабое периодическое электрическое поле $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0\cos\omega t$ которое затем выключается через время T, так что гамильтониан системы зависит от времени и даётся следующим выражением:

$$\hat{H}(t) = \begin{pmatrix} E_0 + d\mathcal{E}(t) & \Delta \\ \Delta & E_0 - d\mathcal{E}(t)\end{pmatrix}$$

Пусть при этом имеет место резонанс: частота внешнего поля слабо отличается от расщепления между уровнями $\delta = \omega - 2\Delta$. Пусть в начальный момент времени система находилась в основном состоянии $|\psi(t=0)\rangle = |G\rangle$ с энергией $E_G = E_0 - \Delta$. Считая время T малым по сравнению с $(d\mathcal{E}_0)^{-1}$, но достаточно большим по сравнению с δ^{-1}, а электрическое поле слабым $d\mathcal{E}_0 \ll \Delta$. определите скорость поглощения энергии $\Gamma = \frac{1}{T}(E(T) - E_G)$.

Пусть теперь излучение не монохроматическое, а имеет достаточно широкий спектр (ширина этого спектра такова, что $T^{-1} \ll \Omega \ll \Delta$). Каково поглощение энергии в этом случае?

Задача 5. Парадокс Greenberger-Horne-Zeilinger-Mermin (GHZM) (15 баллов) Рассмотрим частицу с гильбертовым пространством состояний, построенным на двух векторах $|\uparrow\rangle$ и $|\downarrow\rangle$ и наблюдаемые величины $\hat{\sigma}_{x,y}$, задаваемые соотношениями:

$$\hat{\sigma}_x |\uparrow\rangle = |\downarrow\rangle\,, \quad \hat{\sigma}_x |\downarrow\rangle = |\uparrow\rangle\,, \quad \hat{\sigma}_y |\uparrow\rangle = -i\,|\downarrow\rangle\,, \quad \hat{\sigma}_y |\downarrow\rangle = i\,|\uparrow\rangle$$

Три таких частицы приготовлены в состоянии:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle_1 |\uparrow\rangle_2 |\uparrow\rangle_3 - |\downarrow\rangle_1 |\downarrow\rangle_2 |\downarrow\rangle_3)$$

Какие значения могут принимать следующие наблюдаемые:

$$\begin{aligned} \hat{O}_1 &= \hat{\sigma}_{x1}\hat{\sigma}_{y2}\hat{\sigma}_{y3} \\ \hat{O}_2 &= \hat{\sigma}_{y1}\hat{\sigma}_{x2}\hat{\sigma}_{y3} \\ \hat{O}_3 &= \hat{\sigma}_{y1}\hat{\sigma}_{y2}\hat{\sigma}_{x3} \\ \hat{O}_4 &= \hat{\sigma}_{x1}\hat{\sigma}_{x2}\hat{\sigma}_{x3} \end{aligned}$$

измеренные в таком состоянии?

Задача 6. Каноническое квантование (15 баллов) Пусть про операторы $\hat{x}$ и $\hat{p}$ известно, что $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$, и у этих операторов имеется непрерывный спектр собственных значений $\mathbb{R}$. Покажите, что в координатном представлении, оператор $\hat{p} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$.

1. По индукции, используя результат второго упражнения, вычислите $[\hat{x}, \hat{p}^n]$.
2. Оператор трансляции определим стандартным образом как $\hat{T}_a = e^{i\hat{p}a/\hbar}$. Используя предыдущий пункт, вычислите коммутатор $[\hat{x}, \hat{T}_a]$.
3. Пусть $|x\rangle$ — базис собственных состояний оператора $\hat{x}$, так что $\hat{x}\,|x\rangle = x\,|x\rangle$. Покажите, что построенный оператор $\hat{T}_a$ действительно является оператором трансляции: $\hat{T}_a\,|x\rangle = |x - a\rangle$.
4. Используя матричный элемент $\langle x|\,\hat{T}_a\,|\psi\rangle$ для инфинитезимальной трансляции $a \to 0$, найдите матричный элемент $\langle x|\,\hat{p}\,|\psi\rangle \equiv \hat{p}\psi(x)$.

Из аналогичных соображений можно получить, что $\hat{x} = i\hbar\frac{\partial}{\partial p}$.