

Задачи к семинару «Одномерное движение. Связанные состояния»

17 сентября 2016 г.

Упражнения (35 баллов)

Упражнение 1. Гармонический осциллятор (15 баллов)

1. Вычислите $\langle \hat{x}^4 \rangle$ по произвольному собственному состоянию гармонического осциллятора $|n\rangle$.
2. Частица находилась в основном состоянии гармонического осциллятора с частотой ω . Пусть в какой-то момент времени характерная частота осциллятора мгновенно меняется и становится равной ω' . Вычислите вероятность остаться в основном состоянии.

Упражнение 2. Когерентные состояния (20 баллов)

Когерентные состояния гармонического осциллятора определяются как собственные состояния для понижающего оператора \hat{a} , с собственным комплексным числом $\phi \in \mathbb{C}$: $\hat{a}|\phi\rangle = \phi|\phi\rangle$.

1. Выразите когерентное состояние $|\phi\rangle$ явно через собственные состояния осциллятора. Нормируйте его условием $\langle 0|\phi\rangle = 1$.
2. Представьте их в виде $|\phi\rangle = \hat{C}(\phi)|0\rangle$; найдите явный вид оператора $\hat{C}(\phi)$.
3. Найдите перекрытие $\langle \phi|\phi'\rangle$.
4. Пусть $A(\hat{a}^\dagger, \hat{a})$ представляет собой нормально-упорядоченное выражение (это означает, что в этом выражении все \hat{a}^\dagger стоят слева от \hat{a}). Вычислите $\langle \phi| \hat{A}(\hat{a}^\dagger, \hat{a}) |\phi\rangle$.
5. Докажите следующее тождество для разложения тождественного оператора: $\hat{\mathbb{I}} = \int \frac{d(\text{Re}\phi)d(\text{Im}\phi)}{\pi} e^{-|\phi|^2} |\phi\rangle \langle \phi|$

Задачи (65 баллов)

Задача 1. Туннельное расщепление (20 баллов)

Рассмотрите две мелкие ямы, расстояние между которыми много больше размера этих ям $L \gg a$. Такие ямы моделируются дельта-функциональным потенциалом $U(x) = -\frac{\hbar^2 \kappa}{m} (\delta(x - L/2) + \delta(x + L/2))$.

1. В зависимости от расстояния между ямами, определите, при каких условиях сколько связанных состояний имеется в этой системе.
2. Пусть теперь расстояние между ямами много больше характерного масштаба волновых функций в яме (туннельный режим). Определите расщепление между связанными уровнями.
3. Вычислите характер и силу взаимодействия между ямами, если частица всё время находится в основном состоянии.
4. К системе (расстояние между ямами по-прежнему большое) теперь прикладывается очень слабое внешнее электрическое поле \mathcal{E} . Вычислите поляризуемость такой системы.

Обратите внимание, что такую систему в базисе локализованных в каждой из ям состояний феноменологически можно описать эффективным гамильтонианом 2×2 следующего вида:

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} \varepsilon_0 & t \\ t & \varepsilon_0 \end{pmatrix}$$

Задача 2. Глубокая мелкая яма (45 баллов)

Найдите энергию основного состояния в яме, описываемой потенциалом $U(x) = -U_0 \frac{a}{a+|x|}$, считая яму мелкой $U_0 \ll \frac{\hbar^2}{ma^2}$.