

Задачи к семинару «Непрерывный спектр»

24 сентября 2016 г.

Упражнения (20 баллов)

Упражнение 1 (5 баллов)

Отнормируйте на дельта-функцию от энергии состояния непрерывного спектра, инфинитные в обе стороны для случая, когда потенциал $V(-\infty) = 0$, $V(+\infty) = V_0$.

Упражнение 2 (5 баллов)

Постройте полный базис волновых функций (собственных для гамильтониана свободной частицы) на полупрямой с граничным условием $\psi(0) = 0$. Покажите его полноту непосредственным вычислением.

Упражнение 3 (5 баллов)

Докажите, что коэффициенты прохождения $T = |t|^2 p' / p$ и отражения $R = |r|^2$ удовлетворяют соотношению $T + R = 1$.

Упражнение 4 (5 баллов)

Найдите связь между коэффициентами прохождения и отражения R и T в потенциале $V(x)$ и в зеркально отражённом потенциале $V(-x)$ [альтернативная формулировка — для рассеяния частицы, налетающей слева и частицы, налетающей справа]. *Подсказка:* если $\psi(x)$ — решение стационарного уравнения Шредингера, то $\psi^*(x)$ — тоже решение. Это простейший пример обращения времени в квантовой механике.

Задачи (80 баллов)

Задача 1. Эволюция волновой функции (25 баллов)

1. Частица находится в основном состоянии гармонического осциллятора. Внезапно потенциал выключают. Найдите зависимость волновой функции от времени t . Пользуйтесь линейностью уравнения Шредингера.
2. Через время t_0 после выключения потенциал снова включают. Найдите вероятность того, что частица окажется в *основном* состоянии.
3. Решите п. 1 и 2 для связанного состояния δ -ямы. Можете ограничиться асимптотиками на малых и больших t и t_0 .

Задача 2. Функция Эйри (25 баллов)

1. Для частицы в линейном потенциале $V = \alpha x$, решите уравнение Шредингера в импульсном представлении, получив импульсное представление волновой функции. Перейдите в координатное представление, выразив волновую функцию в виде интеграла.
2. Получите осциллирующую асимптотику методом стационарной фазы. Отнормируйте решения на дельта-функцию от энергии, используя полученную асимптотику.
3. Рассмотрите потенциал ($\alpha > 0$)

$$V(x) = \begin{cases} \alpha x, & x > 0, \\ +\infty & x < 0. \end{cases}$$

Найдите плотность состояний $\nu(E)$ для больших E .

Задача 3. Волновые пакеты (30 баллов)

Пусть $V(\pm\infty) = 0$. В настоящей жизни при рассеянии налетающая частица представляет собой не плоскую волну, а, скорее, волновой пакет, который можно представить в виде

$$|\psi\rangle = \int (dp) b(p - p_0) |p\rangle,$$

где b — функция вида пакета, имеющего характерную ширину $\delta p \ll p_0$.

1. Какой должна быть функция $b(p)$ для того, чтобы волновой пакет был далеко слева от рассеивающего потенциала?
2. Рассмотрим временную эволюцию такой волновой функции $\psi_t(x)$. При $t \rightarrow \infty$ мы ожидаем, что она будет представлять собой два волновых пакета, удаляющихся от потенциала влево и вправо соответственно. Определим коэффициенты прохождения и отражения естественным образом:

$$T = \int_0^\infty |\psi_t(x)|^2 dx, \quad R = \int_{-\infty}^0 |\psi_t(x)|^2 dx.$$

Разлагая $|\psi\rangle$ по рассмотренным на семинаре состояниям рассеяния (правильно нормированным), покажите, что при $t \rightarrow \infty$ коэффициенты прохождения и отражения, определённые выше, сводятся к стандартному определению на языке стационарных волновых функций ($R_0 = |r|^2$, $T_0 = |t|^2$). Корректно ли такое рассмотрение, если потенциал имеет связанные состояния?

3. Свяжите *времена задержки* отражённого и прошедшего волновых пакетов с фазовыми множителями амплитуд рассеяния r , t . Если есть проблемы, рассмотрите случай δ -ямы.