

Задачи к семинару «Теория возмущений»

8 октября 2016 г.

Задачи (100 баллов)

Задача 1. Осциллятор (15 баллов) Одномерный гармонический осциллятор частоты ω находится в основном состоянии. В начальный момент времени включается слабое электрическое поле $U(x) = -e\mathcal{E}x \cos(\omega_0 t)$. Вычислите $\langle x(t) \rangle$; когда применим полученный результат?

Задача 2. Эффект Ландау-Зенера (15 баллов) Рассмотрим произвольную двухуровневую систему, описываемую волновой функцией $|\psi(t)\rangle = \begin{pmatrix} \psi_1(t) \\ \psi_2(t) \end{pmatrix}$ и следующим гамильтонианом, зависящим от времени:

$$\hat{H}(t) = \begin{pmatrix} \alpha t & \gamma \\ \gamma & -\alpha t \end{pmatrix}$$

В начальный момент времени $t \rightarrow -\infty$, система находилась в первом состоянии (так что $|\psi_1(t \rightarrow -\infty)|^2 = 1$). Определите вероятность перехода системы во второе состояние после такой эволюции $|\psi_2(t \rightarrow +\infty)|^2$, считая «скорость движения уровней» большой $\alpha \gg \gamma^2$.

Задача 3. Двуслойный графен (20 баллов) В силу решёточной структуры графена, волновая функция электронов представляет собой двухкомпонентный псевдоспинор $\psi(x) = (\psi_A(x) \ \psi_B(x))^T$, где различные компоненты отвечают различным подрешёткам. Возбуждения вблизи так называемой K -долины зоны Бриллюэна описываются эффективным гамильтонианом размера 2×2 , который записывается следующим образом:

$$\hat{H} = v_F \hat{\sigma} \cdot \hat{p} = v_F (\hat{\sigma}_x \hat{p}_x + \hat{\sigma}_y \hat{p}_y) = v_F \begin{pmatrix} 0 & \hat{p}_x - i\hat{p}_y \\ \hat{p}_x + i\hat{p}_y & 0 \end{pmatrix}$$

($\hat{\sigma}_{x,y,z}$ — матрицы Паули). Для двуслойного графена, соответственно, волновая функция уже образует четырёхкомпонентный спинор $\psi(x) = (\psi_A^{(1)}(x) \ \psi_B^{(1)}(x) \ \psi_A^{(2)}(x) \ \psi_B^{(2)}(x))^T$. Если между слоями нет никакого взаимодействия, то гамильтониан системы имеет просто блочно-диагональный вид $\hat{H} = v_F \begin{pmatrix} \hat{\sigma} \cdot \hat{p} & 0 \\ 0 & \hat{\sigma} \cdot \hat{p} \end{pmatrix}$. Если же два листа графена положить друг на друга определённым образом, то возникает возможность туннелирования электронов между слоями. Гамильтониан такой системы имеет вид:

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} 0 & v_F(\hat{p}_x - i\hat{p}_y) & 0 & 0 \\ v_F(\hat{p}_x + i\hat{p}_y) & 0 & \Delta & 0 \\ 0 & \Delta & 0 & v_F(\hat{p}_x - i\hat{p}_y) \\ 0 & 0 & v_F(\hat{p}_x + i\hat{p}_y) & 0 \end{pmatrix}$$

При нулевом импульсе p , матрица имеет двукратно вырожденное собственное число 0 и однократно вырожденные числа $\pm\Delta$. Таким образом, если нас интересует поведение системы при маленьких импульсах $p \ll \frac{\Delta}{v_F}$, возбуждения $\pm\Delta$ несут незначительный вклад. Используя теорию возмущений, определите спектр низкоэнергетических возбуждений в графене, а также выпишите эффективный низкоэнергетический гамильтониан, который их описывает.

Задача 4. Поляризуемость мелкой ямы (20 баллов) Заряженная частица находится в связанном состоянии одномерной мелкой ямы с уровнем энергии $-E_0$. К системе прикладывается слабое электрическое поле $\mathcal{E}$. Определите сдвиг энергии системы, а также её поляризуемость.

Задача 5. Поляризуемость атома водорода (30 баллов) Атом водорода находится в основном состоянии, описываемом волновой функцией $\psi_{100}(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}} e^{-r/a}$, где $a = \frac{\hbar^2}{me^2}$ — Борковский радиус. Он помещается в постоянное электрическое поле, описываемое гамильтонианом $\hat{V} = -e\mathcal{E}\hat{z}$; требуется определить сдвиг уровня энергии и поляризуемость основного состояния.

Для расчёта сдвига энергии во втором порядке теории возмущений, вообще говоря, необходимо вычислять все матричные элементы $\langle 1, 0, 0 | \hat{z} | n, l, m \rangle$, а кроме них — ещё и матричные элементы $\langle 1, 0, 0 | \hat{z} | k, l, m \rangle$ (k определяет энергию $\frac{k^2}{2m} = E$) для состояний непрерывного спектра а затем вычислять соответствующую сумму и интеграл (вклад от состояний непрерывного спектра оказывается достаточно существенным, его выбросить нельзя).

Это — очень сложная задача; но, к счастью, тут можно поступить иначе. Для этого первую поправку по теории возмущений к волновой функции предлагается найти *точно*, а не искать её в виде разложения.

1. Напишите *точное* уравнение для поправки первого порядка $\psi^{(1)}(\mathbf{r})$ по теории возмущений. Покажите, что в нём можно разделить переменные, сделав анзац $\psi^{(1)}(r, \theta) = f(r/a)e^{-r/a} \cos \theta$; напишите уравнение на функцию $f(z)$.
2. Покажите, что это уравнение имеет простое полиномиальное решение $f(z) = A + Bz + Cz^2$; найдите A, B, C .
3. Найдя волновую функцию, вычислите поправку $E_{100}^{(2)}$ и поляризуемость α .

Замечание: альтернативный способ решения задачи об атоме водорода в постоянном электрическом поле — это использование параболических координат. Эти координаты, в частности, замечательны тем, что в них по-прежнему разделяются переменные. Если же говорить про матричные элементы оператора $\hat{z}$, то лишь небольшое их количество отлично от нуля. Именно благодаря этому поправка первого порядка и имеет такой простой вид.