

Семинар 5. Теория возмущений.

Побойко Игорь

8 октября 2016 г.

Стационарная теория возмущений

Классическая постановка стационарной задачи теории возмущений следующая. Гамильтониан $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}$ разбивается на «невозмущённую» часть $\hat{H}_0$, уровни энергии и волновые функции которой известны $\hat{H}_0 |n^{(0)}\rangle = E_n^{(0)} |n^{(0)}\rangle$. Требуется найти «возмущённые» уровни энергии и волновые функции полного гамильтониана, считая возмущения малым (что означает малость возмущения будет понятно уже после построения самой процедуры). Эта процедура получается путём подстановки в стационарное уравнение Шрёдингера $(\hat{H}_0 + \hat{V})|n\rangle = E_n |n\rangle$ волновых функций и энергий в виде «ряда» по возмущениям $|n\rangle = |n^{(0)}\rangle + |n^{(1)}\rangle + \dots$ и $E_n = E_n^{(0)} + E_n^{(1)} + \dots$ и приравнивая коэффициенты одинаковой малости. Сама процедура изложена в [ЛЛ, глава 6 «Теория возмущений», §38 «возмущения, не зависящие от времени»]; тут мы приведём лишь классические результаты. Для уровней энергии первые несколько поправок даются следующими общими формулами:

$$E_n^{(1)} = V_{nn}, \quad E_n^{(2)} = \sum_{m \neq n} \frac{|V_{mn}|^2}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}}$$

и в свою очередь, поправка первого порядка к волновой функции даётся формулой:

$$|n^{(1)}\rangle = \sum_{m \neq n} \frac{V_{mn}}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}} |m^{(0)}\rangle$$

Тут стоит сделать несколько важных замечаний. Во-первых, из формулы для волновых функций видно, что применимость теории возмущений ограничивается неравенством $|V_{nm}| \ll |E_n^{(0)} - E_m^{(0)}|$ (матричные элементы возмущения должны быть меньше расстояний между уровнями энергии). Отдельно можно рассмотреть случай *вырождения*, когда имеются несколько близких или совпадающих уровней энергии, на которых это неравенство не выполнено.

Во-вторых, ряд теории возмущений некорректно воспринимать буквально как ряд Тейлора. Этот ряд — асимптотический, и, более того, чаще всего он попросту расходится. А кроме того, в физике имеется множество явлений, которые находятся за гранью теории возмущений — так называемые *непертурбативные* явления¹.

В-третьих, задача может иметь также и непрерывный спектр. В таком случае, если мы параметризуем его квантовым числом ν (это может быть, например, энергия E или волновой вектор k), и волновые функции будем нормировать на дельта-функцию этого параметра $\langle \nu | \nu' \rangle = \delta(\nu - \nu')$, то достаточно заменить сумму на интеграл $\sum_m \mapsto \int d\nu$ и написать:

$$|n^{(1)}\rangle = \int d\nu \cdot \frac{V_{\nu n}}{E_n^{(0)} - E_\nu^{(0)}} |\nu^{(0)}\rangle, \quad E_n^{(2)} = \int d\nu \cdot \frac{|V_{\nu n}|^2}{E_n^{(0)} - E_\nu^{(0)}}$$

Отдельно стоит заметить, что если исходное состояние тоже находилось в непрерывном спектре, то интеграл по $d\nu$ вполне может разойтись вблизи особенности $E_n^{(0)} = E_\nu^{(0)}$, чем ограничивается применимость теории возмущений в этом случае.

Пример. Сжатие сферы с бесконечными стенками.

В качестве примера рассмотрим такую задачу. Имеется трёхмерная сфера радиуса R с бесконечными стенками; потенциал имеет вид:

$$U(\mathbf{r}) = \begin{cases} 0, & |\mathbf{r}| < R \\ \infty, & |\mathbf{r}| > R \end{cases}$$

¹Например, из ряда теории возмущений по маленькому параметру $\lambda \ll 1$ невозможно получить эффект, который мал по параметру $\exp(-1/\lambda) \ll 1$.

что соответствует граничным условиям $\psi(\mathbf{r})|_{|\mathbf{r}|=R} = 0$. Требуется найти сдвиг энергии основного состояния при слабом сжатии сферы вдоль оси z (сфера превращается в эллипс $\frac{x^2+y^2}{R^2} + \frac{z^2}{R'^2} = 1$ и $\epsilon = \frac{R-R'}{R} \ll 1$).

Решение Идея решения следующая. Мы можем провести замену $\hat{z}' = \hat{z} \cdot \frac{R}{R'}$, которая переведёт эллипсоид обратно в сферу. При этом из-за ненулевого якобиана такого перехода, возникнет поправка к гамильтониану. При таком сжатии $\hat{p}'_z = \hat{p}_z \cdot \frac{R'}{R}$, и поэтому гамильтониан

$$\hat{H} = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} = \frac{\hat{\mathbf{p}}'^2}{2m} + \frac{\hat{p}'_z{}^2}{2m} \left(\left(\frac{R}{R'} \right)^2 - 1 \right) \approx \underbrace{\frac{\hat{\mathbf{p}}'^2}{2m}}_{\hat{H}_0} + \underbrace{\frac{\hat{p}'_z{}^2 \epsilon}{mR}}_{\hat{V}}$$

Невозмущённый гамильтониан представляет собой просто свободное движение в сфере. Будем решать задачу в сферических координатах, зная, что основное состояние имеет сферическую симметрию:

$$-\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) = E \psi(r), \quad \psi(r=R) = 0$$

Стандартная подстановка $\psi(r) = \frac{\chi(r)}{r}$ сводит задачу к одномерному уравнению Шрёдингера:

$$-\frac{1}{2m} \chi''(r) = E \chi(r) \Rightarrow \chi(r) = A \cos(kr) + B \sin(kr), \quad \frac{k^2}{2m} = E$$

Важно Обратим на граничные условия. Вообще говоря, в нуле волновая функция должна быть интегрируема $|\psi(r)|^2 r^2 dr = |\chi(r)|^2 dr$, и тем самым отсюда, вообще говоря, *не следует*, что $\chi(r)$ должна зануляться в нуле. Это следует из другого рассуждения; а именно, если вблизи нуля $\chi(r) = C = \text{const}$, то $\psi(r) = \frac{C}{r}$. А это соответствует своей очереди, означает, что $\Delta \psi(r) = 4\pi C \delta(\mathbf{r})$. Наконец, это означает, что в потенциальной энергии имеется экзотическая сингулярность типа $U(r) \propto r \cdot \delta(\mathbf{r}) = \frac{\delta(r)}{4\pi r}$ (обратим внимание, что это отлично от нуля!).

Мы заключаем, что эта задача дополняется граничными условиями $\chi(0) = \chi(R) = 0$; поэтому $\chi(r) = \sin kr \Rightarrow \psi(r) = \frac{\sin kr}{r}$ и $k = \frac{\pi}{R} \Rightarrow E_0 = \frac{\pi^2}{2mR^2}$. Наконец, условие нормировки записывается следующим образом:

$$\int_0^R 4\pi r^2 dr \cdot \frac{\sin^2 kr}{r^2} = 2\pi R \Rightarrow \psi(r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi R}} \frac{\sin kr}{r}$$

Поправка первого порядка теории возмущений записывается как $E_0^{(1)} = \langle \psi | \hat{V} | \psi \rangle = \frac{\epsilon}{mR} \langle \psi | \hat{p}_z^2 | \psi \rangle$. Поскольку основное состояние сферически симметрично, то $\langle p_z^2 \rangle = \frac{1}{3} \langle p^2 \rangle = \frac{2m}{3} \langle \hat{H} \rangle = \frac{2m}{3} E_0$. Значит:

$$E_0^{(1)} = \frac{\pi^2}{3mR^3} \epsilon$$

Обратим внимание на следующий факт. Этот сдвиг можно было найти иначе, посчитав *работу*, которую необходимо было бы затратить, чтобы адиабатически сжать такую сферу. Работа даётся выражением $E_0^{(1)} = P \cdot \Delta V$, где $\Delta V = \frac{4\pi}{3} (R^3 - R'^3) = \frac{4\pi}{3} R^3 \epsilon$ — изменение объёма, а $P = -\frac{\partial E}{\partial V} = -\frac{1}{4\pi R^2} \frac{\partial E_0}{\partial R}$ — давление, которое оказывает частица на стенки. Такое выражение в точности воспроизводит ответ; однако, оно показывает явно, что на самом деле важно лишь изменение объёма. Такой способ явно требует сферической симметрии состояния; однако, он обобщается и на состояния с произвольной зависимостью волновой функции от углов.

Вырожденная теория возмущений

Отдельный интерес представляет собой случай вырождения, когда имеются несколько уровней с одинаковыми энергиями². В таких случаях сперва решается секулярное уравнение (смотри [ЛЛ, §39 «секулярное уравнение»]). Суть этой процедуры сводится к *редуцированию* полного гамильтониана на собственное подпространство, то есть рассмотрению маленькой матрицы H_{mn} , где m и n пробегает лишь вырожденные уровни. Затем решается задача на собственные значения и вектора этой (уже маленькой) матрицы.

Соответствующее уравнение $\det \|H_{mn} - E \cdot \delta_{mn}\| = 0$ называют *секулярным*, а собственные волновые функции (которые, ещё раз укажем, являются линейными комбинациями только волновых функций, соответствующим этому вырожденному уровню), называют *правильными волновыми функциями ведущего (нулевого) приближения*. В результате

²На самом деле, эти уровни энергии не обязательно должны *совпадать*. Вполне может оказаться, что они немного различаются; тогда важно, чтобы это отличие было параметрически меньше, чем матричные элементы возмущения, связывающие их, то есть *для этих уровней* имело место обратное неравенство $|V_{nm}| \gg |E_n^{(0)} - E_m^{(0)}|$. Однако «расстояние» до *остальных* уровней спектра обязано быть по-прежнему больше матричных элементов возмущения; иначе теория возмущений будет неприменима.

такой процедуры вырожденное собственное число *расщепляется* на несколько (в таких случаях говорят о снятии вырождения возмущением), матричные элементы возмущения между которыми равны нулю; это и снимает проблему нуля в знаменателе.

Наконец, может так оказаться, что вся матрица возмущения, редуцированная на вырожденное собственное подпространство, равна нулю. В таком случае необходимо рассматривать *второй порядок вырожденной теории возмущений*; и в этом случае секулярное уравнение поправляется, и необходимо рассматривать следующий «эффективный гамильтониан»:

$$H_{mn} \mapsto H_{mn} + \sum_k \frac{V_{mk}V_{kn}}{E_n^{(0)} - E_k^{(0)}}$$

(суммирование проходит по всем уровням k , не принадлежащим вырожденному подпространству).

Пример 2.

Рассмотрим модельную матрицу 3×3 , которая описывает двухкратно вырожденный уровень энергии E_1 и отделённый от него энергетической щелью уровень энергии E_2 , так что $\Delta = E_2 - E_1$. При этом возмущение — туннелирование между этими уровнями энергии, и оно не снимает вырождение в первом порядке теории возмущений:

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} E_1 & t_1 & \\ & E_1 & t_2 \\ t_1 & t_2 & E_2 \end{pmatrix}, \quad \Delta \gg t_1^2, \quad t_2^2$$

Решение Во-первых, можно сразу выписать точные собственные числа и собственные значения (поскольку матрица всё-таки достаточно простая):

$$E = \left\{ E_1, \quad \frac{1}{2}(E_1 + E_2) \pm \sqrt{(\Delta/2)^2 + |t_1|^2 + |t_2|^2} \right\} \approx \left\{ E_1 - \frac{t_1^2 + t_2^2}{\Delta}, \quad E_1, \quad E_2 + \frac{t_1^2 + t_2^2}{\Delta} \right\}$$

Во-первых, поскольку возмущение не связывает состояния с вырожденного подпространства, то можно наивно было бы попробовать применить второй порядок *невырожденной* теории возмущений, скажем, к первому уровню энергии:

$$E_{1,1}^{(2)} = \frac{|V_{13}|^2}{E_1 - E_2} = -\frac{t_1^2}{\Delta}, \quad E_{1,2}^{(2)} = \frac{|V_{23}|^2}{E_1 - E_2} = -\frac{t_2^2}{\Delta}, \quad E_2^{(2)} = \frac{|V_{31}|^2}{E_2 - E_1} + \frac{|V_{32}|^2}{E_2 - E_1} = \frac{t_1^2 + t_2^2}{\Delta}$$

что для уровня энергии E_2 даёт правильный ответ, а для вырожденного уровня $\{E_{1,1}, E_{1,2}\}$ — нет. Чтобы получить правильные ответы, необходимо пользоваться вторым порядком вырожденной теории возмущений. Рецепт говорит, что необходимо составить эффективный гамильтониан для первых двух уровней:

$$H'_{11} = \frac{V_{13}V_{31}}{E_2 - E_1} = -\frac{t_1^2}{\Delta}, \quad H'_{12} = H'_{21} = \frac{V_{13}V_{32}}{E_2 - E_1} = -\frac{t_1 t_2}{\Delta}, \quad H'_{22} = \frac{V_{23}V_{32}}{E_2 - E_1} = -\frac{t_2^2}{\Delta} \Rightarrow H' = -\frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} t_1^2 & t_1 t_2 \\ t_1 t_2 & t_2^2 \end{pmatrix}$$

(поскольку в нашем случае уровни энергии в точности совпадают, то для эффективного гамильтониана достаточно рассматривать лишь возмущение, а потом добавить к ответу E_1). Диагонализуя матрицу, мы немедленно получаем поправки второго порядка к вырожденному уровню:

$$E_{1,1}^{(2)} = 0, \quad E_{1,2}^{(2)} = -\frac{t_1^2 + t_2^2}{\Delta}$$

которые на сей раз воспроизводят точный ответ.

Нестационарная теория возмущений

Второй класс задач, решаемый теорией возмущений — это эволюция под влиянием возмущения, зависящего от времени; вместо стационарного уравнения Шрёдингера решается нестационарное $i \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = (\hat{H}_0 + \hat{V}(t)) |\psi(t)\rangle$. Для приближённого решения таких задач применяется так называемое представление взаимодействия; суть сводится к разложению волновой функции $|\psi(t)\rangle$ по собственным состояниям гамильтониана $\hat{H}_0$, которые *эволюционировали бы во времени в отсутствии возмущения* (это называется «волновые функции в представлении взаимодействия»). Если $\hat{H}_0 |n\rangle = E_n |n\rangle$, то $|n(t)\rangle = e^{-iE_n t} |n\rangle$ представляет собой волновую функцию в представлении взаимодействия.

Такое разложение имеет вид $|\psi(t)\rangle = \sum_n a_n(t) |n(t)\rangle$; подстановка такого представления приводит к следующему уравнению:

$$i \frac{\partial a_n}{\partial t} = \sum_m V_{nm}^{(I)}(t) a_m(t), \quad V_{nm}^{(I)}(t) = \langle n(t) | \hat{V}(t) | m(t) \rangle = e^{i(E_n - E_m)t} V_{nm}(t)$$

(оператор $V^{(I)}$ называют оператором возмущения в представлении взаимодействия). Это уравнение прекрасно тем, что явно мы избавились от «быстрой» эволюции за счёт гамильтониана $\hat{H}_0$, и величины $a_m(t)$ зависят от времени уже за счёт слабого возмущения. Это уравнение уже можно решать методом итераций.

Будем теперь держать в голове следующую задачу. Пусть в начальный момент времени частица находилась в одном из собственных состояний гамильтониана $|\psi(t=0)\rangle = |i\rangle^3$, и в этот момент времени к системе приложили зависящее от времени возмущение $\hat{V}(t) = \hat{F}e^{i\omega t} + \hat{F}^\dagger e^{-i\omega t}$. Требуется найти скорость вероятность ухода частицы из состояния $|i\rangle$ в единицу времени. В таком случае, решая уравнение методом итераций, мы получаем:

$$i \frac{\partial a_f(t)}{\partial t} = V_{fi}^{(I)}(t) a_i(t) = (F_{fi} e^{i\omega t} + F_{if}^* e^{-i\omega t}) e^{i(E_f - E_i)t}$$

$$a_f(t) = -i \int_0^t dt (F_{fi} e^{i(E_f - E_i + \omega)t} + F_{if}^* e^{i(E_f - E_i - \omega)t}) = F_{fi} \frac{e^{i(E_f - E_i + \omega)t} - 1}{E_f - E_i + \omega} + F_{if}^* \frac{e^{i(E_f - E_i - \omega)t} - 1}{E_f - E_i - \omega}$$

Через достаточно большое время T , эти два члена существенно отличны от нуля лишь вблизи $|E_f - (E_i + \omega)| \sim \frac{1}{T}$ и $|E_f - (E_i - \omega)| \sim \frac{1}{T}$; тем самым первый член описывает как бы поглощение одного фотона с энергией ω^4 , а второй — испускание; и при частоте $\omega T \gg 1$, эти процессы существенно разнесены по энергии, и поэтому их можно рассматривать независимо (например, при рассмотрении $|a_f(t)|^2$, перекрёстные члены будут сильно осциллировать во времени и самоусредняться в ноль). Поэтому, с хорошей точностью можно указать:

$$|a_f(t)|^2 \approx |F_{fi}|^2 \left(\frac{4 \sin^2 \frac{E_f - E_i - \omega}{2} t}{(E_f - E_i - \omega)^2} + \frac{4 \sin^2 \frac{E_f - E_i + \omega}{2} t}{(E_f - E_i + \omega)^2} \right)$$

При больших временах t (таких что $\alpha t \gg 1$), $\frac{\sin^2 \alpha t}{\alpha^2}$ — узкая функция с пиком в $\alpha = 0$; тем самым, мы можем заменить его на дельта-функцию. Коэффициент при дельта-функции при этом определяется из $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 \alpha t}{\alpha^2} d\alpha = \pi t$, и тем самым $\frac{\sin^2 \alpha t}{\alpha^2} \approx \pi t \delta(\alpha)$. Таким образом, получаем:

$$|a_f(t)|^2 \approx 2\pi t |F_{fi}|^2 (\delta(E_f - E_i - \omega) + \delta(E_f - E_i + \omega))$$

Наконец, если состояния f лежат в непрерывном спектре какой-то физической величины ν ; и они нормированы условием $\langle \nu_f | \nu_{f'} \rangle = \delta(\nu_f - \nu_{f'})$, то $|a_f(t)|^2 d\nu_f$ — это буквально вероятность перехода. Ответ получился пропорциональным t ; тем самым, скорость переходов на достаточно больших временах оказывается постоянной. Окончательно, получаем:

$$d\omega_{i \rightarrow f} = \frac{2\pi}{\hbar} |F_{fi}|^2 \delta(E_f - E_i \pm \hbar\omega) d\nu_f$$

Тут мы восстановили $\hbar$; при этом по размерности $[\omega] = \frac{1}{c}$, и представляет собой *количество переходов в единицу времени*. Эта формула носит название «золотого правила Ферми» (Fermi golden rule), и применяется оно очень часто. В частности, если возмущение постоянно ($\hat{V} = \text{const}$, $\omega = 0$), то с его помощью можно описывать переходы внутри состояний непрерывного спектра, $d\omega_{i \rightarrow f} = \frac{2\pi}{\hbar} |V_{fi}|^2 \delta(E_f - E_i) d\nu_f$. В таком виде эта формула используется, например, в задачах рассеяния при нахождении сечения рассеяния.

Пример 3. Ионизация мелкой ямы периодическим электрическим полем.

Рассмотрим мелкую одномерную яму под действием периодического электрического поля $\hat{H} = \frac{p^2}{2m} - \frac{\kappa}{m} \delta(x) - e\mathcal{E}x \cos \omega t$. Пусть частица находилась в основном состоянии; требуется найти частоту однофотонных переходов в состояния непрерывного спектра.

³от «initial» — «начальный»

⁴Буквально о фотонах говорить тут, конечно, некорректно; никакого квантованного электромагнитного поля тут нет, а имеется классическое возмущение. Однако это — принятое устойчивое выражение.

Решение Основное состояние мелкой ямы имеет энергию $E_i = -E_0 = -\frac{\kappa^2}{2m}$; нормированная волновая функция основного состояния имеет вид $\psi_i(x) = \sqrt{\kappa}e^{-\kappa|x|}$. Возмущение имеет вид $\hat{V} = -\frac{1}{2}e\mathcal{E}x(e^{-i\omega t} + e^{i\omega t})$; тем самым оператор $\hat{F} = -\frac{1}{2}e\mathcal{E}x$ (который необходим нам для golden rule). Обратим внимание, что этот оператор имеет пространственную чётность -1 ; тем самым, можно составить *правила отбора*: переходы будут происходить только в нечётные состояния непрерывного спектра.

Состояния непрерывного спектра с положительной и отрицательной чётностью устроены следующим образом:

$$\psi_k^{(+)}(x) = \cos(k|x| + \varphi_k), \quad \psi_k^{(-)}(x) = \sin kx$$

Волновая функция чётных состояний в нуле отлична от нуля; поэтому они там испытывают излом (фаза φ_k тем самым как-то связана с силой дельта-ямы). Нечётные состояния же в точке, где расположена яма, зануляются, и тем самым они её «не чувствуют», и поэтому они в точности совпадают с нечётными волновыми функциями для свободной частицы.

Дальше для использования ЗПФ необходимо как-то отнормировать волновые функции. Предлагается отнормировать их по шкале энергии; в таком случае $d\nu_f \equiv dE_f$, и интеграл с дельта-функцией можно будет тривиально снять. Таким образом:

$$\langle k, -|k', - \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_k^{(-)}(x)\psi_{k'}^{(-)}(x)dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (\cos((k-k')x) - \cos((k+k')x)) dx = \pi\delta(k-k')$$

Поскольку $E_k = \frac{k^2}{2m}$, то можно обратить внимание, что $\delta(E_k - E_{k'}) = \delta(\frac{k^2}{2m} - \frac{k'^2}{2m}) = \frac{m}{k}\delta(k-k')$. Таким образом, правильно нормированные волновые функции непрерывного спектра имеют вид $\psi_f(x) = \sqrt{\frac{m}{\pi k}} \sin kx$. Дальше требуется посчитать матричный элемент перехода:

$$F_{fi} = -\frac{1}{2}e\mathcal{E} \cdot \sqrt{\frac{m}{\pi k}} \cdot \sqrt{\kappa} \int_{-\infty}^{\infty} \sin kx \cdot x \cdot e^{-\kappa|x|} dx = -\sqrt{\frac{m}{\pi}} e\mathcal{E} \cdot \frac{2k^{1/2}\kappa^{3/2}}{(k^2 + \kappa^2)^2}$$

Собирая всё вместе, скорость переходов записывается следующим образом:

$$\frac{1}{\tau_i} = \int_0^{\infty} dE_f \cdot 2\pi |F_{fi}|^2 \delta(E_f - E_i - \omega) = \frac{2e^2 E_0^{3/2} \sqrt{\omega - E_0}}{m\omega^4} \mathcal{E}^2$$

Обсудим полученный ответ. Для «количества частиц», которые находились в начальном состоянии, в первом порядке теории возмущений феноменологически можно записать формулу в духе радиоактивного распада (формально мы получили лишь то, что в первом порядке, когда $|a_i|^2 = 1$, уравнение имеет вид $\frac{d}{dt}|a_i|^2 = -\frac{1}{\tau}$):

$$\frac{d}{dt}|a_i|^2 = -\frac{1}{\tau}|a_i|^2 \Rightarrow |a_i(t)|^2 = e^{-t/\tau} \Rightarrow a_i(t) = e^{-t/2\tau},$$

а значит эволюция амплитуды $\langle i|\psi(t)\rangle = e^{-iE_i t - t/2\tau}$. Таким образом, полученный ответ можно воспринимать как маленькую мнимую часть к уровню энергии $E_i \mapsto E_i - \frac{i}{2\tau}$. Если рассматривать плотность состояний $\nu(E)$, то такая мнимая часть приводит к уширению уровня $\delta(E - E_i) \mapsto \frac{1}{\pi} \frac{\Gamma/2}{(\Gamma/2)^2 + (E - E_i)^2}$, $\Gamma = \frac{1}{\tau}$. Теория возмущений оказывается применима, покуда ширина уровня остаётся маленькой, то есть $E_i\tau \gg 1$; обратим внимание, что это условие независимо можно трактовать как то, что электрическое поле должно быть достаточно слабым $\mathcal{E} \ll \mathcal{E}_{crit}$, так и то, что частота должна быть достаточно большой $\omega \gg \omega_{crit}$. Априори, глядя на условие задачи, параметр, по которому строилась теория возмущений, вообще говоря, был неизвестен.

Список литературы

[ЛЛ] Ландау, Лифшиц, курс теоретической физики, том 3 «Квантовая механика (нерелятивистская теория)», 5-е изд. (2002)