

Задачи к семинару «Адиабатическое приближение»

15 октября 2016 г.

Упражнения (45 баллов)

Упражнение 1 Условие применимости (10 баллов)

Рассмотрите частицу массы m в бесконечно глубокой потенциальной яме ширины a . Пусть a осциллирует со временем по закону

$$a(t) = a_0 (1 - \alpha \sin^2 \omega t), \quad \alpha < 1.$$

При каких условиях применимо адиабатическое приближение?

Упражнение 2 Фаза Берри для спина 1/2 (15 баллов)

Рассмотрите спин $1/2$ в магнитном поле $\mathbf{B}(t)$, медленно зависящем от времени и возвращающемся к исходному значению к моменту времени T :

$$\mathcal{H} = -\mu \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B}(t).$$

Пусть в начальный момент времени спин ориентирован по полю. Свяжите фазу Берри γ в момент времени T и телесный угол Ω , вырезанный на единичной сфере лучом, направленным по $\mathbf{B}(t)$. *Указание:* проведите вычисление для простой траектории $\mathbf{B}(t)$, отвечающей заданному Ω и апеллируйте к соображениям симметрии и аддитивности.

Упражнение 3 Фаза Берри через производные гамильтониана (10 баллов)

Как известно, фаза Берри γ_a в пространстве параметров гамильтониана $\mathcal{H}(\boldsymbol{\lambda})$ [собственные функции $|\psi_a(\boldsymbol{\lambda})\rangle$, $\mathcal{H}|\psi_a(\boldsymbol{\lambda})\rangle = E_a|\psi_a(\boldsymbol{\lambda})\rangle$] может быть записана через (гипер)поверхностный интеграл от *кривизны Берри* $\gamma_a = -Im \int dS_\lambda \mathcal{F}_a$, где $\mathcal{F}_{i_1 i_2 \dots}^a = e_{j k i_1 i_2 \dots} \left\langle \nabla_{\lambda}^j \psi_a | \nabla_{\lambda}^k \psi_a \right\rangle$ [при $\dim \boldsymbol{\lambda} = 3$ это – векторное произведение, $\mathcal{F}_a = \langle \nabla_{\lambda} \psi_a | \times | \nabla_{\lambda} \psi_a \rangle$]. Вычисление по этой формуле требует построения системы собственных функций, гладко зависящих от параметров $\boldsymbol{\lambda}$, что достаточно непросто для сложных систем. Докажите *калибровочно-инвариантную формулу* для кривизны Берри, которая записывается в терминах производных гамильтониана и не требует непрерывности $|\psi_a(\boldsymbol{\lambda})\rangle$ по $\boldsymbol{\lambda}$:

$$\mathcal{F}_{i_1 i_2 \dots}^a = e_{j k i_1 i_2 \dots} \sum_{b \neq a} \frac{\langle \psi_a | \nabla^j \mathcal{H} | \psi_b \rangle \langle \psi_b | \nabla^k \mathcal{H} | \psi_a \rangle}{(E_a - E_b)^2}.$$

Упражнение 4 Неабелева¹ связность Берри (10 баллов)

Адиабатическая теорема не запрещает переходы между состояниями с одинаковой энергией. Пусть имеется n ортонормированных вырожденных состояний с нулевой энергией $\mathcal{H}(t)|\psi_a(t)\rangle = 0$, $a = 1, \dots, n$ (мгновенные собственные состояния). Найдите матрицу A , задающую уравнение эволюции $dc_a/dt = -A_{ab}c_b$ коэффициентов $c_a(t)$ разложения по этому базису произвольного вектора состояния $|\psi(t)\rangle = \sum_a c_a(t)|\psi_a(t)\rangle$. Считайте известными $|\psi_a(t)\rangle$. Как изменится A , если произвести замену базиса с помощью унитарной матрицы $U(t):|\psi_a(t)\rangle \rightarrow U_{ab}(t)|\psi_b(t)\rangle$?

Закон преобразования A совпадает с законом преобразования калибровочного поля в теории Янга-Миллса (обобщение электродинамики) и законом преобразования связности (символы Кристоффеля) в общей теории относительности. Это происходит вследствие того, что все это – примеры *связности*, объекта, изучаемого дифференциальной геометрией и задающего *правило переноса* тензоров в пространстве.

¹Абелевыми называют семейства объектов, которые коммутируют.

Задачи (55 баллов)

Задача 1. Эволюция волновой функции (15 баллов)

Рассмотрите одномерную частицу массы m с Гамильтонианом

$$H(t) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2} + x f(t),$$

где

$$f(t) = f_0 e^{-t^2/\tau^2}.$$

При больших τ применимо адиабатическое приближение. Разложите волновую функцию по мгновенным состояниям гамильтониана и получите уравнения на коэффициенты разложения. Предполагая, что при $t \rightarrow -\infty$ система находится в основном состоянии, найдите вероятности перехода p_{0n} в возбужденные состояния при $t \rightarrow +\infty$ в первом не исчезающем порядке адиабатического приближения.

Задача 2. Жизнь в промежутке (20 баллов)

Частица массы m находится между двумя бесконечными цилиндрами $|R_1 - R_2| \ll R_1 \sim R_2$, которые касаются друг друга внутренним образом. Найдите низколежащие энергетические уровни.

Задача 3. Поворот (20 баллов)

Квантовое состояние частицы, которая находится в квадратном ящике с непроницаемыми стенками задается квантовыми числами n_x и n_y , которые могут быть произвольными натуральными числами. Первое возбужденное состояние дважды вырождено: $E_{12} = E_{21}$. Пусть состояние частицы в начальный момент времени есть

$$\psi = \alpha \psi_{12} + \beta \psi_{21}.$$

Ящик медленно вращается на угол 2π так, что после поворота его новое положение совпадает с исходным. Найдите волновую функцию ψ после такого вращения.