

Задачи к семинару «Квазиклассическое приближение»

29 октября 2016 г.

Упражнения (45 баллов)

Упражнение 1 (30 баллов)

Найдите квазиклассические уровни энергии для следующих потенциалов:

- (5 баллов) гармонический осциллятор $U(x) = \frac{m\omega^2 x^2}{2}$; сравните полученный ответ с точным.
- (10 баллов) треугольная яма $U(x) = \begin{cases} +\infty, & x < 0, \\ Fx, & x > 0. \end{cases}$. Обратите внимание, что в нуле граничное условие необходимо модифицировать.
- (15 баллов) трёхмерный кулоновский потенциал $U(r) = -\frac{e^2}{r}$ для сферически симметричных состояний; сравните полученный ответ с точным. *Указание:* определите граничное условие в нуле, а в правой точке остановки используйте стандартное.

Упражнение 2 (15 баллов)

Найдите вероятность квазиклассического туннелирования, а также критерии применимости квазиклассического приближения, для потенциальных барьеров следующего вида:

- (10 баллов) барьер вида $U(x) = \frac{U_0}{\cosh^2(x/a)}$ для частиц энергии $0 < E < U_0$. Сравните найденный ответ с точным.
- (5 баллов) барьер вида $U(x) = -U_0(\frac{x}{a})^2$ для частиц энергии $E < 0$.

Задачи (55 баллов)

Задача 1. Почти квазиклассический потенциал (15 баллов)

Определите в квазиклассическом приближении коэффициент отражения частицы большой энергии E от потенциала, который в некоторой точке x_0 имеет особенность. Исследуйте следующие случаи:

1. Потенциал в точке x_0 испытывает скачок, то есть $U(x_0 - 0) = U_1$ и $U(x_0 + 0) = U_2$.
2. Потенциал в точке x_0 испытывает излом, то есть $U(x < x_0) \approx U_0 - F_1 x$ и $U(x > x_0) \approx U_0 - F_2 x$.

Задача 2. Хитрый уровень (15 баллов)

Найдите минимальное U_0 , при котором в потенциале следующего вида:

$$U(x) = \begin{cases} 0, & |x| > 2a, \\ \left(2 - \frac{|x|}{a}\right)^2 V, & a < |x| < 2a, \\ -U_0, & |x| < a, \end{cases}$$

имеется связанное состояние. Считайте $V \gg 1/ma^2$.

Задача 3. Интерференция в классически запрещённой области (25 баллов)

В двуслойном графене может происходить весьма интересное явление — интерференция туннельных амплитуд в классически запрещённой области. Рассмотрите эффективный гамильтониан двуслойного графена, в котором в спектре имеется щель:

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} \Delta & \frac{1}{2m}(p_x + ip_y)^2 \\ \frac{1}{2m}(p_x - ip_y)^2 & -\Delta \end{pmatrix}.$$

Приложим постоянное электрическое поле в некотором участке, создав $p - n$ переход. Это означает, что к гамильтониану нужно добавить потенциальную энергию вида ($\alpha > 0$):

$$U(x) = \begin{cases} \alpha x, & |x| < L, \\ \alpha L \operatorname{sign} x & |x| > L, \end{cases}$$

где L достаточно большое. Потенциальная энергия имеет диагональную структуру в пространстве подрешёток: $\hat{U} = U(x) \cdot \hat{\mathbb{I}}$.

1. Рассматривая x как параметр, нарисуйте зонную структуру, как функцию x .
2. Обратите внимание на то, что электроны, находящиеся в нижней части верхней зоны слева от перехода могут попасть в верхнюю часть нижней зоны справа от перехода, но для этого им нужно протуннелировать через запрещённую зону (точки остановки x_l и x_r). Рассмотрите такой электрон, налетающий слева на переход (p_y является параметром и в ходе движения не меняется). Найдите квазиклассические решения в классически запрещённой области

$$\psi(x) = \chi \cdot \frac{C}{\sqrt{|p(x)|}} \exp\left(\pm \int^x |p(x)| dx\right).$$

Здесь χ — столбец, структуру которого можете явно не искать (то есть, вам нужно найти квазиклассический импульс $p(x)$).

3. Обратите внимание на то, что благодаря матричной структуре гамильтониана таких решений *четыре*, а не два, как обычно. Как обычно, оставляем решения, экспоненциально затухающие вправо, обозначив их ψ_1 и ψ_2 . Примите, как данность, что сшивка волновой функции в точке x_l классически доступной левой области с классически запрещённой областью приводит к равным коэффициентам перед экспонентами $\psi_1(x_l) = \psi_2(x_l)$. Также считайте, что при выходе из классически запрещённой области, эти экспоненты дают равный вклад в амплитуду протуннелировавшей волны: $t \propto \psi_1(x_r) + \psi_2(x_r)$. Найдите квазиклассическую вероятность туннелирования как функцию энергии с точностью до предэкспоненты.

В случае затруднений можете обратиться к статье <https://arxiv.org/pdf/1101.0436.pdf>.