Задачи семинару «Квазиклассика и квазистационарные состояния»

12 ноября 2016

Упражнения

Упражнение 1 (20 баллов)

Используя результаты семинара, вычислите с точностью до числа в предэкспоненте (не включая это число) следующие величины. Отдельно рассмотрите случай основного состояния $n = 0$ (для которого, вообще говоря, квазиклассическое приближение неприменимо; однако, с заданной точностью оно оказывается правильным — ошибка оказывается лишь в числе в предэкспоненте).

Упражнение 1.1 (10 баллов) Квазиклассическое расщепление n-того уровня энергии в двухъямном потенциале $U(x) = U_0 \frac{(x^2-a^2)^2}{a^4}$.

Упражнение 1.2 (10 баллов) Квазиклассическую ширину n-того квазистационарного уровня в потенциале $U(x) = U_0 \left(\frac{1}{2} \frac{x^2}{a^2} - \frac{1}{3} \frac{x^3}{a^3} \right)$

Задачи

Задача 1. Квазистационарные состояния (45 баллов)

Рассмотрим модельную задачу, на примере которой можно продемонстрировать все характерные особенности квазистационарных состояний. В этой задаче мы будем решать уравнение Шрёдингера в потенциале следующего вида:

$$U(x) = \begin{cases} \infty, & x < 0 \\ V\delta(x-a), & x > 0 \end{cases}$$

Рассеивающий потенциал мы будем предполагать сильным, $V \gg \frac{1}{ma}$. Если заменить этот потенциал на бесконечную стенку, то в этой задаче имеется множество стационарных состояний вида $\psi_n(x) = \sin k_n x$, $k_n = \frac{\pi n}{a}$ и $E_n = \frac{k_n^2}{2m}$. Возможность туннелирования превращает эти состояния в *квазистационарные* — хоть и не стационарные, но долгоживущие, и на достаточно небольших промежутках времени их можно считать стационарными. Ниже будут изложены три различных точки зрения на такие состояния и показана их эквивалентность.

Задача 1.1. Распад квазистационарного состояния (20 баллов) В начальный момент времени частица была «приготовлена» в одном из квазистационарных состояний, $\psi(x, t = 0) = \psi_0(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin k_n x$.

1. Определите непрерывный спектр исходной задачи, нормированный на дельта-функцию от разницы энергий.

2. Рассмотрите разложение исходной волновой функции по этому непрерывному спектру. Обратите внимание, что $|\psi(E)|^2$ вблизи энергии E_n имеет максимум. Как устроена $\psi(E)$ вблизи этого максимума?

3. Найдите амплитуду того, что через достаточно большое время t частица останется в в этом квазистационарном состоянии $c(t) = \int \psi_0^*(x)\psi(x,t)dx$. Покажите, что на достаточно больших временах соответствующая вероятность $P(t) = |c(t)|^2 \propto e^{-t/\tau}$; найдите «время жизни уровня» τ.

Найденное «время жизни» окажется достаточно большим. Это означает, что на временах $t \ll \tau$, состояние практически стационарно — волновая функция не меняется, за исключением тривиальной динамической фазы $e^{-iE_n t}$.

Кроме того, зависимость амплитуды $c(t) \simeq e^{-iE_n t - t/2\tau_n}$ формально похожа на обычную «динамическую» фазу $e^{-i\varepsilon t}$, но с комплексной энергией $\varepsilon = E_n - i/2\tau_n$ (важно, что мнимая часть отрицательна — в противном случае, имел бы место экспоненциальный рост амплитуды, что очевидным образом бессмысленно).

Задача 1.2. Задача рассеяния (15 баллов) Другой способ «смотреть» на квазистационарные состояния — это исследовать задачу рассеяния.

1. Определите волновые функции исходной задачи, которые соответствуют задаче рассеяния, то есть имеющие асимптотическое поведение $\psi(x \to \infty) = e^{-ikx} + re^{ikx}$. Величина коэффициента отражения $R = |r|^2$ тривиальным образом равна единице, поскольку движение инфинитно только в одну сторону. Но вот амплитуда отражения $r(E) \equiv e^{2i\delta(E)}$ имеет нетривиальные свойства.

2. Покажите, что амплитуда r, как функция *комплексной* энергии ε имеет серию полюсов, близких к вещественной оси $\varepsilon_n = E_n - i\Gamma_n/2$; при этом $\Gamma_n \ll E_n$, а величины E_n близки к спектру задачи с бесконечными стенками. Как выглядит $r(E)$ и $\delta(E)$ вблизи $E \approx E_n$?

3. Пусть теперь на систему налетает волновой пакет, локализованный по энергии вблизи некоторого значения E. Асимптотическое поведение на больших временах (после отражения) волновой функции при наличии или отсутствии потенциала очень похожи — в обоих случаях отразится волновой пакет, форма которого похожа на форму исходного. Однако, при наличии рассеивателя может произойти *задержка волнового пакета* — отражённый пакет полетит «направо» чуть позже. Свяжите время задержки этого волнового пакета τ с величиной $\frac{d\delta}{dE}$. *Подсказка*: вспомните, как доказывается утверждение, что $v = \frac{\partial E}{\partial p}$ представляет собой групповую скорость — скорость движения волнового пакета, и придумайте, как провести аналогичное рассуждение тут.

4. Постройте времена задержки как функцию энергии налетающего пакета E; покажите, что для частиц с энергией близкой к резонансной $E \approx E_n$, время задержки τ оказывается аномально большим. Вычислить это время удобнее всего, используя результат пункта 2; покажите, что это время выражается через Γ_n^{-1}. Обратите внимание, что время задержки волнового пакета, очевидным образом, в силу причинности, должно быть положительным; это накладывает требование $\Gamma_n > 0$.

Обратите внимание, что найденное время задержки оказалось таким же, как и время жизни квазистационарного состояния. С этим связана физическая интерпретация: при резонансе частица «попадает» в метастабильное состояние, где она «застревает» на достаточно продолжительное время, а затем вылетает.

Задача 1.3. Комплексная энергия (10 баллов) Наконец, можно определить квазистационарные состояния, рассматривая стационарное уравнение Шрёдингера формально для комплексных значений энергии. Хоть, вообще говоря, такие состояния бессмысленны — они не входят в базис, по ним нельзя раскладываться, поэтому с их помощью, вообще говоря, нельзя решать нестационарное уравнение Шрёдингера; однако часто бывает так, что это — самый простой способ найти ответ на вопросы, заданные в предыдущих двух задачах.

1. Покажите, что стационарное уравнение Шрёдингера $\left(\frac{\hat{p}^2}{2m} + U(x)\right)\psi(x) = \varepsilon\psi(x)$ для некоторых комплексных значений энергии ε_n имеет формальное решение, которое соответствует наличию только расходящейся волны $\psi(x \to +\infty) = e^{ikx}$.

2. Покажите, что эти значения $\varepsilon_n = E_n - i\Gamma_n/2$ в точности совпадают с полюсами амплитуды отражения, найденные в предыдущей задаче.

3. Заметьте, что если бы мы искали решения с асимптотикой в виде сходящейся волны, мы бы получили решения $\varepsilon_n = E_n + i\Gamma_n/2$, то есть с неправильной причинностью (см. предыдущую задачу).

Более того, наличие полюсов в амплитуде прохождения или рассеяния эквивалентно наличию решения уравнения Шрёдингера с соответствующей комплексной энергией и «причинной» асимптотикой (соответствующей расходящейся волне). Тем самым, решая эту задачу, мы также находим ответы и на предыдущие две; чаще всего, однако, эта задача оказывается проще.

Задача 2. Одномерный кристалл и модель сильной связи (35 баллов)

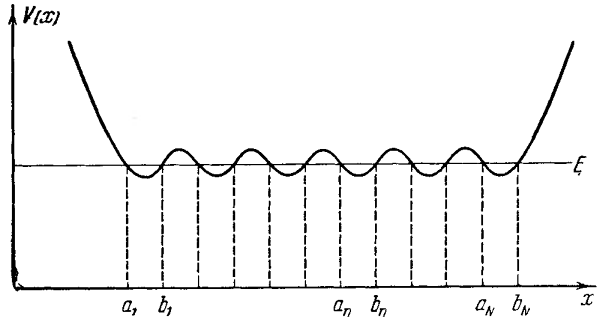

Рис. 1: Модель одномерного кристалла

Рассмотрите потенциал, представляющий собой $N \gg 1$ одинаковых квазиклассических ям, разделённых одинаковыми же туннельными барьерами (см. рис.). Для удобства, вместо нулевых граничных условий ($\psi(x \to \pm\infty) \to 0$) предлагается рассмотреть периодические граничные условия, которые формулируются следующим образом: волновая функция в первой яме тождественно совпадает с волновой функцией в $(N+1)$-ой яме (таким образом, «уникальных» ям ровно N). В такой задаче, n-тый уровень энергии в отдельной яме расщепляется на N подуровней $k = 1, \dots, N$. Определите с квазиклассической точностью уровни энергии $E_{n,k}$.

Вспомните, как в задаче ко второму семинару для двухъямного потенциала из мы писали «эффективный гамильтониан», который в ведущем порядке был просто $\begin{pmatrix} \epsilon_0 & 0 \\ 0 & \epsilon_0 \end{pmatrix}$, и имел экспоненциально малую «туннельную» поправку $\begin{pmatrix} 0 & t \\ t & 0 \end{pmatrix}$, которая приводила к расщеплению. Как устроен эффективный такой гамильтониан для этой задачи? Покажите, что при правильном выборе единственного параметра t, этот гамильтониан воспроизводит уровни E_{nk}.