

Экзамен по квантовой механике

12 января 2018 г.

Задача 1 (15 баллов) Рассмотрим газ из N тождественных частиц — бозонов — взаимодействующих точечным образом. В таком случае волновая функция имеет вид $\psi(x_1, \dots, x_N)$ и она является симметричной по отношению к произвольным перестановкам координат. Такая система описывается следующим гамильтонианом:

$$\hat{H} = \sum_i \frac{\hat{p}_i^2}{2m} - V \sum_{i < j} \delta(x_i - x_j) \quad (1)$$

Пусть число частиц $N = 3$, и между ними имеется притяжение $V > 0$. Покажите, что задача допускает следующий *анзац* (Bethe):

$$\psi(x_1, x_2, x_3) = \exp(-\kappa|x_1 - x_2| - \kappa|x_2 - x_3| - \kappa|x_1 - x_3|) \quad (2)$$

При каком κ такая волновая функция является собственной для гамильтониана? Какова энергия такого состояния?

Задача 2 (15 баллов) Частица находится в связанном состоянии мелкой ямы $U(x) = -\frac{\kappa}{m}\delta(x - x_0)$. В некоторый момент времени яму начинают «трясти» по закону $x_0(t) = a \cdot \sin \omega t$. Считая амплитуду колебаний a маленькой, определите вероятность ионизации ямы в единицу времени. Выразите ответ через энергию связи E_0 мелкой ямы.

Задача 3 (15 баллов) Атом водорода находится в сильно-возбуждённом s -состоянии (главное квантовое число $n \gg 1$, орбитальное квантовое число $l = 0$). Вычислите среднее значение $\langle r^\nu \rangle$ по такому состоянию, считая $\nu > -\frac{1}{2}$ ($\nu \sim 1$; и ν — не обязательно целое). Выразите ответ через Боровский радиус $a = \frac{1}{me^2}$.

Задача 4 (20 баллов) Частица находится в связанном состоянии мелкой ямы $U(x) = -\frac{\kappa}{m}\delta(x - x_0)$. Яму медленно передвигают по закону $x_0(t) = a \cdot \tanh \omega t$. Определите вероятность ионизации в результате такого перемещения. Выразите ответ через энергию связи E_0 мелкой ямы.

Задача 5 (25 баллов) Трёхмерный конус с бесконечными стенками и малым углом раствора $2\alpha \ll 1$ помещён в поле тяжести g остриём вниз. Частица массы m находится в основном состоянии внутри такого конуса. В некоторый момент времени остриё отрезают на малом расстоянии h от вершины. Определите с экспоненциальной точностью время выхода частицы из конуса.

Задача 6 (30 баллов) Спин- $1/2$ находится в магнитном поле \mathbf{B} , которое вращается в плоскости yz по следующему закону:

$$\hat{H} = -\mu \mathbf{B} \cdot \hat{\sigma}, \quad \mathbf{B}(t) = B \cdot \left(0, \frac{1}{\cosh \omega t}, -\tanh \omega t \right), \quad (3)$$

В начальный момент времени $t \rightarrow -\infty$ спин и магнитное поле направлены по оси z . Найдите точную вероятность того, что спин останется направленным по оси z после завершения вращения при $t \rightarrow \infty$.